บทความวิชาการ

เซตย่อยวิภัชนัยในกึ่งริงของอาเบล-แกรสส์แมน

สลิลทิพย์ แดงกองโค และ ไพโรจน์ เยียระยง*
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏพิบูลสงคราม

* ผู้นิพนธ์ประสานงาน โทรศัพท์ 09 5638 6464 อีเมล: pairote0027@hotmail.com DOI: 10.14416/j.kmutnb.2018.10.005
รับเมื่อ 16 ตุลาคม 2560 แก้ไขเมื่อ 22 กุมภาพันธ์ 2018 ตอบรับเมื่อ 12 มีนาคม 2561 เผยแพร่ออนไลน์ 10 ตุลาคม 2561

บทคัดย่อ

กำหนดให้ R เป็นกึ่งริงของอาเบล-แกรสส์แมน ในบทความนี้ได้แนะนำแนวคิดของเซตย่อยวิภัชนัย ไอดีลทางซ้ายวิภัชนัย และไอดีลทางขวาวิภัชนัยในกึ่งริงของอาเบล-แกรสส์แมน และได้ศึกษาไอดีลทางซ้ายวิภัชนัยและไอดีลทางขวาวิภัชนัยในกึ่งริงของอาเบล-แกรสส์แมน ได้แสดงว่าเซตย่อยไม่ว่าง I ของ R เป็นกึ่งริงย่อยของอาเบล-แกรสส์แมน (ไอดีลทางซ้าย ไอดีลทางขวา ไอดีล) ก็ต่อเมื่อ f_I (tf_I) เป็นกึ่งริงย่อยของอาเบล-แกรสส์แมนวิภัชนัย (ไอดีลทางซ้ายวิภัชนัย ไอดีลทางขวาวิภัชนัย ไอดีลวิภัชนัย) ของ R สุดท้ายนี้ได้พิสูจน์ว่า f เป็นกึ่งริงย่อยของอาเบล-แกรสส์แมนวิภัชนัย (ไอดีลทางซ้ายวิภัชนัย ไอดีลทางขวาวิภัชนัย ไอดีลวิภัชนัย) ของ R ก็ต่อเมื่อ $U(f, t) \neq \varnothing$ เป็นกึ่งริงย่อยของอาเบล-แกรสส์แมนของ R (ไอดีลทางซ้ายของ R ไอดีลทางขวาของ R ไอดีลของ R)

คำสำคัญ: กึ่งริงของอาเบล-แกรสส์แมน, กึ่งริงย่อยของอาเบล-แกรสส์แมน, เซตระดับ, (ซ้าย ขวา) ไอดีลวิภัชนัย

การอ้างอิงบทความ: สลิลทิพย์ แดงกองโค และ ไพโรจน์ เยียระยง, "เซตย่อยวิภัชนัยในกึ่งริงของอาเบล-แกรสส์แมน," *วารสารวิชาการพระจอมเกล้าพระนครเหนือ*, ปีที่ 29, ฉบับที่ 1, หน้า 167–174, ม.ค.–มี.ค. 2562.

Academic Article

On Fuzzy Subsets in Abel-Grassmann's Semirings

Salinthip Daengkongkho and Pairote Yiarayong*
Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Pibulsongkram Rajabhat University, Phitsanulok, Thailand

* Corresponding Author, Tel. 09 5638 6464, E–mail: pairote0027@hotmail.com
DOI: 10.14416/j.kmutnb.2018.10.005
Received 16 October 2017; Revised 22 February 2018; Accepted 12 March 2018; Published online: 10 October 2018

Abstract

Let R be an Abel-Grassmann's semiring. In this paper, we introduce the concept of a fuzzy subset, fuzzy left and fuzzy right ideals in Abel-Grassmann's semirings, and to study fuzzy left and fuzzy right ideals in Abel-Grassmann's semirings. We show that a non-empty subset I of R is an Abel-Grassmann's subsemiring (left ideal, right ideal, ideal) if and only if f_I (tf_I) is a fuzzy Abel-Grassmann's subsemiring (fuzzy left ideal, fuzzy right ideal, fuzzy ideal) of R. Finally we show that f is a fuzzy Abel-Grassmann's subsemiring (fuzzy left ideal, fuzzy right ideal, fuzzy ideal) of R if and only if $U(f, t)$ is an Abel-Grassmann's subsemiring (left ideal, right ideal, ideal) of R.

Keywords: Abel-Grassmann's Semiring, Abel-Grassmann's Subsemiring, Level Set, Fuzzy (left, right) Ideal

Please cite this article as: S. Daengkongkho and P. Yiarayong, "On fuzzy subsets in Abel-Grassmann's semirings," *The Journal of KMUTNB*, vol. 29, no. 1, pp. 167–174, Jan.–Mar. 2019 (in Thai).

1. บทนำ

ในปี ค.ศ. 2015 Devi และ Latha [1] ได้นำเสนอแนวคิดเกี่ยวกับกึ่งริงของอาเบล-แกรสส์แมน (Abel-Grassmann's Semiring) ซึ่งเป็นการขยายแนวความคิดของกรุปพอยด์อาเบล-แกรสส์แมน (Abel-Grassmann's Groupoid) กล่าวคือจะเรียก $(R, +, \cdot)$ ว่ากึ่งริงของอาเบล-แกรสส์แมน ถ้ามีสมบัติ

1. $(R, +)$ และ $(R, \cdot)$ เป็นกรุปพอยด์ของอาเบล-แกรสส์แมน

2. มีสมบัติแจกแจง

เซตย่อยวิภัชนัย (Fuzzy Subset) ของ f ใน R คือฟังก์ชัน $f : R \rightarrow [0,1]$ เมื่อ $[0,1]$ เป็นช่วงปิด (Closed Interval) ในแนวคิดนี้ได้ถูกค้นพบครั้งแรกโดย Zadeh ในปี ค.ศ. 1965 [2] ในทศวรรษที่ผ่านมาได้มีการศึกษา ค้นคว้าและพัฒนาเซตย่อยวิภัชนัย กันอย่างแพร่หลายทั้งทางด้านคณิตศาสตร์ การแพทย์ การทหาร ด้านธุรกิจ อุตสาหกรรม และการควบคุมแบบฟัซซี เช่น มีการพัฒนาหุ่นยนต์ติดตามผู้สูงอายุผ่านอุปกรณ์ไคเนคโดยใช้การควบคุมแบบฟัซซี [3] โครงสร้างเซตย่อยวิภัชนัยได้เริ่มต้นในการพัฒนาอย่างเป็นระบบในงานวิจัยของ Rosenfeld [4] ในปี ค.ศ. 1971 แนวคิดเกี่ยวกับไอดีลวิภัชนัย (Fuzzy Ideal) ในกึ่งกรุป (Semigroup) ได้ถูกพัฒนาโดย McLean และ Kummer [5] ในปี ค.ศ. 1992 และได้มีนักคณิตศาสตร์ได้ทำการศึกษาและพัฒนาเซตย่อยวิภัชนัยในกึ่งกรุป (Semigroup) กันอย่างแพร่หลายในเวลาต่อมา ในปี ค.ศ. 1983 Liu [6] ได้แนะนำแนวความคิดของไอดีลวิภัชนัยในริง (Ring) ต่อมาในปี ค.ศ. 1998 และปี ค.ศ. 1999 Neggers *et al.* [7], [8] ได้แนะนำแนวความคิดของไอดีลวิภัชนัยในกึ่งริง และได้มีนักคณิตศาสตร์ได้ทำการศึกษาและพัฒนาเซตย่อยวิภัชนัยในกึ่งริงกันอย่างแพร่หลายในเวลาต่อมาจนถึงปัจจุบัน

ในปี ค.ศ. 2011 Rehman [9] ได้นำเสนอแนวคิดของเซตวิภัชนัยในริงของอาเบล-แกรสส์แมน (Fuzzy Set in Abel-Grassmann's Ring) เรียกย่อๆ ว่าเซตวิภัชนัยใน AG-ริง (Fuzzy Set in AG-ring) หรือเซตวิภัชนัยในริงเกือบทางซ้าย (Fuzzy Set in Left Almost Ring) เรียกย่อๆ ว่าเซตวิภัชนัยใน LA-ริง (Fuzzy Set in LA-ring) กล่าวคือจะเรียก f ว่า เซตย่อยวิภัชนัยของริงของอาเบล-แกรสส์แมน ในปี ค.ศ. 2012 Shah *et al.* [10], [11] ได้ขยายความคิดของชั้นของริงที่ไม่มีสมบัติเปลี่ยนหมู่ตาม นอกจากนี้ได้แนะนำแนวความคิดของริงย่อยเกือบทางซ้ายปกติสหัชญาณนิยม (Intuitionistic Fuzzy Normal Left Almost Subrings) เรียกย่อๆ ว่า LA-ริงย่อยปกติสหัชญาณนิยม (Intuitionistic Fuzzy Normal LA-subrings)

บทความนี้ได้แนะนำแนวคิดของเซตย่อยวิภัชนัย ไอดีลทางซ้ายวิภัชนัยและไอดีลทางขวาวิภัชนัยในกึ่งริงของอาเบล-แกรสส์แมน และได้ศึกษาไอดีลทางซ้ายวิภัชนัยและไอดีลทางขวาวิภัชนัยในกึ่งริงของอาเบล-แกรสส์แมน ได้แสดงว่าเซตย่อยไม่ว่าง I ของ R เป็นกึ่งริงย่อยของอาเบล-แกรสส์แมน (ไอดีลทางซ้าย ไอดีลทางขวา ไอดีล) ก็ต่อเมื่อ f_I (tf_I) เป็นกึ่งริงย่อยของอาเบล-แกรสส์แมนวิภัชนัย (ไอดีลทางซ้ายวิภัชนัย ไอดีลทางขวาวิภัชนัย ไอดีลวิภัชนัย) ของ R สุดท้ายนี้ได้แสดงว่า f เป็นกึ่งริงย่อยของอาเบล-แกรสส์แมนวิภัชนัย (ไอดีลทางซ้ายวิภัชนัย ไอดีลทางขวาวิภัชนัย ไอดีลวิภัชนัย) ของ R ก็ต่อเมื่อ $U(f, t) \neq \varnothing$ เป็นกึ่งริงย่อยของอาเบล-แกรสส์แมน (ไอดีลทางซ้าย ไอดีลทางขวา ไอดีล) ของ R

2. ผลลัพธ์พื้นฐาน

หัวข้อนี้จะกล่าวถึงบทนิยาม และทฤษฎีบทพื้นฐานที่สำคัญของกึ่งริงของอาเบล-แกรสส์แมน

บทนิยาม 2.1 [12] กึ่งริงของอาเบล-แกรสส์แมน คือสามสิ่งอันดับ $(R, +, \cdot)$ โดยที่

1. $(R, +)$ เป็นกรุปของอาเบล-แกรสส์แมน (Abel-Grassmann's Group)

2. $(R, \cdot)$ เป็นกรุปพอยด์ของอาเบล-แกรสส์แมน

3. มีสมบัติการแจกแจง (Distributive Property) กล่าวคือ $a(a+b) = ab + ac$ และ $(b+c)a = ba + ca$ สำหรับทุก $a, b, c \in R$

ข้อตกลง ถ้าไม่เกิดความคลุมเครือและสับสน จะเขียนแทน $(R, +, \cdot)$ ด้วย R

บทนิยาม 2.2 [13] จะเรียก R ว่า กึ่งริงของอาเบล-แกรสส์แมนมีเอกลักษณ์ทางซ้าย (Abel-Grassmann's Semiring Left Identity) ถ้า R กึ่งริงของอาเบล-แกรสส์แมน และมีสมาชิก $e \in R$ ซึ่ง $e \cdot a \in a$ สำหรับทุก $a \in R$

บทตั้ง 2.3 [13] ถ้า R เป็นกึ่งริงของอาเบล-แกรสส์แมนมีเอกลักษณ์ทางซ้าย e แล้ว $RR = R$ และ $R = eR = Re$

บทตั้ง 2.4 [12] ถ้า R เป็นกึ่งริงของอาเบล-แกรสส์แมน แล้ว $(ab)(cd) = (ac)(bd)$ สำหรับทุก $a, b, c \in R$

บทนิยาม 2.5 [12] ให้ S เป็นเซตไม่ว่างและเป็นเซตย่อยของกึ่งริงของอาเบล-แกรสส์แมน R จะเรียก S ว่า กึ่งริงย่อยของอาเบล-แกรสส์แมน (Abel-Grassmann's Subsemiring) ถ้า S เป็นกึ่งริงของอาเบล-แกรสส์ภายใต้การดำเนินการเดียวกันกับ R

บทตั้ง 2.6 [13] ให้ S เป็นเซตไม่ว่างและเป็นเซตย่อยของกึ่งริงของอาเบล-แกรสส์แมน R จะได้ว่า S เป็นกึ่งริงย่อยของอาเบล-แกรสส์แมนของ R ก็ต่อเมื่อ $a+b \in S$ และ $a \cdot b \in S$ สำหรับทุก $a, b \in S$

บทนิยาม 2.7 [12] ให้ I เป็นกึ่งริงย่อยของอาเบล-แกรสส์แมนของ R จะเรียก I ว่า ไอดีลทางซ้าย (Left Ideal) ของ R ถ้า $RI \subseteq I$ และเรียก I ว่า ไอดีลทางขวา ถ้า $IR \subseteq I$ และจะเรียก I ว่า ไอดีล (Ideal) ถ้า I เป็นทั้งไอดีลทางซ้ายและไอดีทางขวาของ R

หมายเหตุ Kellil [12] จะเรียก I ว่าไอดีลทางซ้าย (ไอดีลทางขวา ไอดีล) ในบทนิยาม 2.7 ว่า กึ่งไอดีลทางซ้าย (กึ่งไอดีลทางขวา กึ่งไอดีล)

สำหรับเซต R ที่ไม่เป็นเซตว่าง ฟังก์ชัน $f: R \to [0,1]$ จะถูกเรียกว่าเซตย่อยวิภัชนัยของ R (Fuzzy Subset of R) [2] ในกึ่งริงของอาเบล-แกรสส์แมน R เราจะให้ฟังก์ชัน $\mathfrak{R}$ คือ $\mathfrak{R}: R \to [0,1]$ นิยามโดย $\mathfrak{R}(x) = 1$ สำหรับทุก $x \in R$ ถ้า f และ g เป็นเซตย่อยวิภัชนัยของ R แล้ว $f \subseteq g$ หมายถึง $f(x) \le g(x)$ สำหรับทุก $x \in R$ นอกจากนี้ $f \cap g$ และ $f \cup g$ คือเซตย่อยวิภัชนัยของ R นิยามโดย

$(f \cap g)(x) = min\{f(x), g(x)\}$,

$(f \cup g)(x) = max\{f(x), g(x)\}$

สำหรับทุก $x \in R$ ถ้า $\{f_\alpha : \alpha \in \beta\}$ เป็นวงศ์ (Family) ของเซตย่อยวิภัชนัยของ R แล้ว $\bigcap_{\alpha\in\beta} f_\alpha$ และ $\bigcup_{\alpha\in\beta} f_\alpha$ หมายถึง

$$\left(\bigcap_{\alpha\in\beta} f_\alpha\right)(x) = \bigcap_{\alpha\in\beta} f_\alpha(x) = inf\{f_\alpha(x) : \alpha \in \beta\},$$

$$\left(\bigcup_{\alpha\in\beta} f_\alpha\right)(x) = \bigcup_{\alpha\in\beta} f_\alpha(x) = sup\{f_\alpha(x) : \alpha \in \beta\}$$

ผลบวก (Sum) และผลคูณ (Product) ของเซตย่อยวิภัชนัยเขียนแทนด้วย $f \oplus g$ และ $f \circ g$ หมายถึง

$$(f \oplus g)(x) = \begin{cases} \bigcup_{x=y+z} min\{f(y), g(z)\} & ; \exists y, z \in R; x = y+z \\ 0 & ; \text{otherwise} \end{cases}$$

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} \bigcup_{x=yz} min\{f(y), g(z)\} & ; \exists y, z \in R; x = yz \\ 0 & ; \text{otherwise.} \end{cases}$$

จะเรียกเซตย่อยวิภัชนัย f ของ R ว่า กึ่งริงย่อยของอาเบล-แกรสส์แมนวิภัชนัย (Fuzzy Abel-Grassmann's Subsemiring) ถ้า

$f(x+y) \ge min\ \{f(x), f(y)\}$,

$f(xy) \ge min\ \{f(x), f(y)\}$,

สำหรับทุก $x, y \in R$ กึ่งริงย่อยของอาเบล-แกรสส์แมนวิภัชนัย f จะเรียกว่าไอดีลทางซ้ายวิภัชนัย (Fuzzy Left Ideal) ถ้า $f(xy) \ge f(y)$ สำหรับทุก $x, y \in R$ จะเรียก ไอดีลทางขวาวิภัชนัย (Fuzzy Right Ideal) ถ้า $f(xy) \ge f(x)$ สำหรับทุก $x, y \in R$ และจะเรียก f ว่าไอดีลวิภัชนัย (Fuzzy Ideal) ถ้า f เป็นทั้งไอดีลทางซ้ายและทางขวาวิภัชนัย

3. กรณีศึกษา

บทตั้ง 3.1 ถ้า R เป็นกึ่งริงของอาเบล-แกรสส์แมนและ f, g, h เป็นเซตย่อยวิภัชนัยของ R แล้ว

1. $(f \oplus g) \oplus h = (h \oplus g) \oplus f$
2. $(f \circ g) \circ h = (h \circ g) \circ f$
3. $(f \oplus g) \circ h = (f \circ h) \oplus (g \circ h)$
4. $(f \circ g) \oplus h = (f \oplus h) \circ (g \oplus h)$

การพิสูจน์ 1. ให้ $x \in R$ พิจารณา

$$(f\oplus g) \oplus h(x)$$
$$= \bigcup_{x=y+z} min\{(f\oplus g)(y), h(z)\}$$
$$= \bigcup_{x=y+z} min\left\{\bigcup_{y=a+b} min\{f(a), g(b)\}, h(z)\right\}$$
$$= \bigcup_{x=(a+b)+z} min\{min\{f(a), g(b)\}, h(z)\}$$
$$= \bigcup_{x=(z+b)+a} min\{min\{h(z), g(b)\}, f(a)\}$$
$$\leq \bigcup_{x=(z+b)+a} min\left\{\begin{matrix}\bigcup_{z+b=c+d} min\{h(c), g(d)\}, \\ f(a)\end{matrix}\right\}$$
$$= \bigcup_{x=(z+b)+a} min\{(h\oplus g)(z+b), f(a)\}$$
$$= \bigcup_{x=w+a} min\{(h\oplus g)(w), f(a)\}$$
$$= (h\oplus g)\oplus f(x)$$

ดังนั้น $(f\oplus g) \oplus h \subseteq (h \oplus g) \oplus f$ ในทำนองเดียวกันสามารถแสดงได้ว่า $(h\oplus g) \oplus f \subseteq (f\oplus g) \oplus h$ นั่นคือ $(f\oplus g) \oplus h = (h \oplus g) \oplus f$

2. แสดงได้ในทำนองเดียวกันกับข้อ 1

3. ให้ $x \in R$ พิจารณา

$$(f\oplus g) \circ h(x)$$
$$= \bigcup_{x=yz} min\{(f\oplus g)(y), h(z)\}$$
$$= \bigcup_{x=yz} min\left\{\bigcup_{y=a+b} min\{f(a), g(b)\}, h(z)\right\}$$
$$= \bigcup_{x=(a+b)z} min\{min\{f(a), g(b)\}, h(z)\}$$
$$= \bigcup_{x=az+bz} min\left\{\begin{matrix}min\{f(a), h(z)\}, \\ min\{g(b), h(z)\}\end{matrix}\right\}$$
$$\leq \bigcup_{x=\alpha\beta+\chi\delta} min\left\{\begin{matrix}\bigcup_{az=\alpha\beta} \min\{f(\alpha), h(\beta)\}, \\ \bigcup_{bz=\chi\delta} min\{g(\chi), h(\delta)\}\end{matrix}\right\}$$
$$= \bigcup_{x=az+bz} min\{f\circ h(az), g\circ h(bz)\}$$
$$= (f\circ h)\oplus(g\circ h)(x)$$

ดังนั้น $(f\oplus g) \circ h \subseteq (f \oplus h) \circ (g \oplus h)$ ในทำนองเดียวกันสามารถแสดงได้ว่า $(f\oplus h) \circ (g\oplus h) \subseteq (f\oplus g) \circ h$ นั่นคือ $(f\oplus g) \circ h = (f\oplus h) \circ (g \oplus h)$

4. แสดงได้ในทำนองเดียวกันกับข้อ 3

ข้อสังเกต จากบทตั้ง 3.1 ถ้า R เป็นกึ่งริงของอาเบล-แกรสส์แมนและ $\Im(R)$ เป็นเซตที่มีสมาชิกเป็นเซตย่อยวิภัชนัยทั้งหมดของ R แล้ว $(\Im(R), \oplus, \circ)$ เป็นกึ่งริงของอาเบล-แกรสส์แมน

ทฤษฎีบท 3.2 ถ้า R เป็นกึ่งริงของอาเบล-แกรสส์แมนมีเอกลักษณ์ทางซ้ายและ $f, g, h, k \in \Im(R)$ แล้ว

1. $f\circ (g \circ h) = g \circ (f \circ h)$
2. $(f\circ g) \circ (h \circ k) = (k \circ h) \circ (g \circ f)$

การพิสูจน์ แสดงได้ในทำนองเดียวกันกับบทตั้ง 3.1

ทฤษฎีบท 3.3 ให้ R เป็นกึ่งริงของอาเบล-แกรสส์แมนและ $f \in \Im(R)$ จะได้ว่า f เป็นกึ่งริงย่อยของอาเบล-แกรสส์แมนวิภัชนัย ก็ต่อเมื่อ $f\oplus f \subseteq f$ และ $f\circ f \subseteq f$

การพิสูจน์ $(\Rightarrow)$ ให้ $x \in R$ พิจารณา

$$f\oplus f(x) = \bigcup_{x=y+z} min\{f(y), f(z)\}$$
$$\leq \bigcup_{x=y+z} f(y+z)$$
$$= f(x)$$

ดังนั้น $f\oplus f \subseteq f$ ในทำนองเดียวกันสามารถแสดงได้ว่า $f\circ f \subseteq f$

$(\Leftarrow)$ ให้ $x, y \in R$ พิจารณา

$$f(x+y) \geq f\oplus f(x+y)$$
$$= \bigcup_{x+y=a+b} min\{f(a), f(b)\}$$
$$\geq min\{f(x), f(y)\}$$

ในทำนองเดียวกันสามารถแสดงได้ว่า $f(xy) \geq min\{f(x), f(y)\}$ ดังนั้น f เป็นกึ่งริงย่อยของอาเบล-แกรสส์แมนวิภัชนัยของ R

ทฤษฎีบท 3.4 ให้ R เป็นกึ่งริงของอาเบล-แกรสส์แมน และ $f \in \Im(R)$ จะได้ว่า f เป็นไอดีลทางซ้ายก็ต่อเมื่อ $f \oplus f \subseteq f$ และ $\Re \circ f \subseteq f$

การพิสูจน์ ($\Rightarrow$) เห็นได้ชัดเจนว่า $f \oplus f \subseteq f$ ให้ $x \in R$ พิจารณา

$$\begin{aligned}\Re \circ f(x) &= \bigcup_{x=yz} min\{\Re(y), f(z)\} \\ &= \bigcup_{x=yz} min\{1, f(z)\} \\ &= \bigcup_{x=yz} f(z) \\ &\leq \bigcup_{x=yz} f(yz) \\ &= f(x)\end{aligned}$$

ดังนั้น $R \circ f \subseteq f$

($\Leftarrow$) โดยทฤษฎีบท 3.3 เห็นได้ชัดเจนว่า f เป็นกึ่งริงย่อยของอาเบล-แกรสส์แมนวิภัชนัยของ R ให้ $x \in R$ พิจารณา

$$\begin{aligned}f(xy) &\geq \Re \circ f(xy) \\ &= \bigcup_{xy=ab} min\{\Re(a), f(b)\} \\ &\geq min\{\Re(a), f(y)\} \\ &= min\{1, f(y)\} \\ &= f(y)\end{aligned}$$

ดังนั้น f เป็นไอดีลทางซ้ายของ R

ทฤษฎีบท 3.5 ถ้า R เป็นกึ่งริงของอาเบล-แกรสส์แมนมีสัญลักษณ์และศูนย์ทางซ้ายแล้ว $\Re \oplus \Re = \Re$ และ $\Re \circ \Re = \Re$

การพิสูจน์ ให้ $x \in R$ พิจารณา

$$\begin{aligned}\Re \oplus \Re(x) &= \bigcup_{x=y+z} min\{\Re(y), \Re(z)\} \\ &= \bigcup_{x=y+z} min\{1,1\} \\ &= 1 \\ &= \Re(x)\end{aligned}$$

ดังนั้น $\Re \oplus \Re = \Re$ ในทำนองเดียวกันสามารถแสดงได้ว่า $\Re \circ \Re = \Re$

ทฤษฎีบท 3.6 ให้ I เป็นเซตย่อยของกึ่งริงของอาเบล-แกรสส์แมน R และ $f \in \Im(R)$ นิยามโดย

$$f_I(x) = \begin{cases} 1 & ; x \in I \\ 0 & ; \text{otherwise} \end{cases}$$

จะได้ว่า

1. I เป็นกึ่งริงย่อยของอาเบล-แกรสส์แมนก็ต่อเมื่อ f_I เป็นกึ่งริงย่อยของอาเบล-แกรสส์แมนวิภัชนัยของ R

2. I เป็นไอดีลทางซ้ายก็ต่อเมื่อ f_I เป็นไอดีลทางซ้ายวิภัชนัยของ R

3. I เป็นไอดีลทางขวาก็ต่อเมื่อ f_I เป็นไอดีลทางขวาวิภัชนัยของ R

4. I เป็นไอดีลก็ต่อเมื่อ f_I เป็นไอดีลวิภัชนัยของ R

5. I เป็น k-ไอดีลก็ต่อเมื่อ f_I เป็น k-ไอดีลวิภัชนัยของ R

การพิสูจน์

1. ($\Rightarrow$) ให้ $x, y \in R$ ถ้า $x \notin I$ หรือ $y \notin I$ แล้ว $f_I(x) = 0$ หรือ $f_I(y) = 0$ ดังนั้น

$$f_I(x+y) \geq 0 = min\{f_I(x), f_I(y)\}$$

และ

$$f_I(xy) \geq 0 = min\{f_I(x), f_I(y)\}$$

ถ้า $x, y \in I$ แล้ว $f_I(x) = 1$ และ $f_I(y) = 1$ จึงได้ว่า $f_I(x+y) = 1 = min\{f_I(x), f_I(y)\}$ และ $f_I(xy) = 1 = min\{f_I(x), f_I(y)\}$ ดังนั้น f_I เป็นกึ่งริงย่อยของอาเบล-แกรสส์แมนวิภัชนัยของ R

($\Leftarrow$) ให้ $x, y \in I$ เนื่องจาก

$$f_I(x+y) \geq min\{f_I(x), f_I(y)\} = \{1,1\} = 1$$

และ

$$f_I(xy) \geq min\{f_I(x), f_I(y)\} = \{1,1\} = 1$$

ดังนั้น $f_I(x+y) = 1$ และ $f_I(xy) = 1$ จึงได้ว่า xy, $x + y \in I$ นั่นคือ I เป็นกึ่งริงย่อยของอาเบล-แกรสส์แมนของ R

2. ($\Rightarrow$) โดยข้อ 1 จะได้ว่า f_I เป็นกึ่งริงย่อยของอาเบล-แกรสส์แมนวิภัชนัยของ R ให้ $x, y \in R$ ถ้า $y \notin I$ แล้ว $f_I(y) = 0$ ดังนั้น $f_I(xy) \geq 0$ ถ้า $y \in I$ แล้ว $xy \in I$ นั่นคือ $f_I(xy) = 1 = f_I(y)$ จึงได้ว่า f_I เป็นไอดีลทางซ้ายวิภัชนัยของ R

($\Leftarrow$) โดยข้อ 1 จะได้ว่า I เป็นกึ่งริงย่อยของอาเบล-

แกรสส์แมนของ R ให้ $r \in R$ และ $x \in I$ เนื่องจาก $f_I(rx) \geq f_I(x) = 1$ ดังนั้น $f_I(rx) = 1$ นั่นคือ $rx \in I$ จึงได้ว่า I เป็นไอดีลทางซ้ายของ R

3. พิสูจน์ในทำนองเดียวกันกับข้อ 2

4. เห็นได้ชัดเจนโดยข้อ 2 ข้อ 3

ทฤษฎีบท 3.7 ให้ I เป็นเซตย่อยของกึ่งริงของอาเบล-แกรสส์แมน R และ $f \in \Im(R)$, $t \in (0,1]$ นิยามโดย

$$tf_I(x) = \begin{cases} t & ; x \in I \\ 0 & ; \text{otherwise} \end{cases}$$

จะได้ว่า

1. I เป็นกึ่งริงย่อยของอาเบล-แกรสส์แมนก็ต่อเมื่อ tf_I เป็นกึ่งริงย่อยของอาเบล-แกรสส์แมนวิภัชนัยของ R

2. I เป็นไอดีลทางซ้ายก็ต่อเมื่อ tf_I เป็นไอดีลทางซ้ายวิภัชนัยของ R

3. I เป็นไอดีลทางขวาก็ต่อเมื่อ tf_I เป็นไอดีลทางขวาวิภัชนัยของ R

4. I เป็นไอดีลก็ต่อเมื่อ tf_I เป็นไอดีลวิภัชนัยของ R

การพิสูจน์ พิสูจน์ในทำนองเดียวกันกับทฤษฎีบท 3.6

บทนิยาม 3.8 ให้ R เป็นกึ่งริงของอาเบล-แกรสส์แมน และ $f \in \Im(R)$ และ $t \in [0,1]$ จะเรียก $U(f, t) := \{x \in R : f(x) \geq t\}$ ว่าเซตระดับ (Level Set) ของ f

ตัวอย่าง ให้ I เป็นเซตย่อยของกึ่งริงของอาเบล-แกรสส์แมน R และ

$$f_I(x) = \begin{cases} 1 & ; x \in I \\ 0 & ; \text{otherwise} \end{cases}$$

สำหรับแต่ละ $t \in (0,1]$ โดยบทนิยาม 3.8 จะได้ว่า $U(f_R, t) = R$ และ $U(f_\varnothing, t) = \varnothing$

ทฤษฎีบท 3.9 ให้ R เป็นกึ่งริงของอาเบล-แกรสส์แมน และ $f \in \Im(R)$ และ $t \in [0,1]$ จะได้

1. $U(f_R, t)\,(\neq \varnothing)$ เป็นกึ่งริงย่อยของอาเบล-แกรสส์แมนก็ต่อเมื่อ f เป็นกึ่งริงย่อยของอาเบล-แกรสส์แมนวิภัชนัยของ R

2. $U(f_R, t)\,(\neq \varnothing)$ เป็นไอดีลทางซ้ายก็ต่อเมื่อ f เป็นไอดีลทางซ้ายวิภัชนัยของ R

3. $U(f_R, t)\,(\neq \varnothing)$ เป็นไอดีลทางขวาก็ต่อเมื่อ f เป็นไอดีลทางขวาวิภัชนัยของ R

4. $U(f_R, t)\,(\neq \varnothing)$ เป็นไอดีลก็ต่อเมื่อ f เป็นไอดีลวิภัชนัยของ R

การพิสูจน์ พิสูจน์ในทำนองเดียวกันกับทฤษฎีบท 3.6

4. สรุป

จากการศึกษาเซตย่อยวิภัชนัยในกึ่งริงของอาเบล-แกรสส์แมนได้ว่าเซตย่อยไม่ว่าง I ของ R เป็นกึ่งริงย่อยของอาเบล-แกรสส์แมน (ไอดีลทางซ้าย ไอดีลทางขวา ไอดีล) ก็ต่อเมื่อ $f_I(tf_I)$ เป็นกึ่งริงย่อยของอาเบล-แกรสส์แมนวิภัชนัย (ไอดีลทางซ้ายวิภัชนัย ไอดีลทางขวาวิภัชนัย ไอดีลวิภัชนัย) ของ R นอกจากนี้ยังได้พบว่าถ้า f เป็นกึ่งริงย่อยของอาเบล-แกรสส์แมนวิภัชนัย (ไอดีลทางซ้ายวิภัชนัย ไอดีลทางขวาวิภัชนัย ไอดีลวิภัชนัย) ของ R ก็ต่อเมื่อ $U(f, t) \neq \varnothing$ เป็นกึ่งริงย่อยของอาเบล-แกรสส์แมน (ไอดีลทางซ้าย ไอดีลทางขวา ไอดีล) ของ R

เอกสารอ้างอิง

[1] D. M. Devi and G. S. Latha, “LA–semirings satisfying the identity ab=a+b+1,” *International Journal of Innovative Science, Engineering & Technology*, vol. 2, pp. 378–389, 2015.

[2] L. A. Zadeh, “Fuzzy sets,” *Information and Control*, vol. 8, pp. 338–353, 1965.

[3] A. Phromfaiy, “Development of kinect guided senior citizen following robot by fuzzy control,” *The Journal of KMUTNB*, vol. 27, no. 2, pp. 329–337, 2017 (in Thai).

[4] A. Rosenfeld, “Fuzzy groups,” *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 35, pp. 512–517, 1971.

[5] R. G. McLean and H. Kummer, “Fuzzy ideals in semigroups,” *Fuzzy Sets Syst*, vol. 48, pp. 137–140, 1992.

[6] W. Liu, “Operations on fuzzy ideals,” *Fuzzy*

Sets and Systems, vol. 11, pp. 19–29, 1983.

[7] J. Neggers, Y. B. Jun, and H. S. Kim, "Extensions of L-fuzzy ideal in semirings," *Kyungpook Mathematical Journal*, vol. 38, no. 1, pp. 131–135, 1998.

[8] J. Neggers, Y. B. Jun, and H. S. Kim, "On L-fuzzy ideal in semirings-II," *Czechoslovak Mathematical Journal*, vol. 49, no. 1, pp. 127–133, 1999.

[9] I. Rehman, "On generalized commutative rings and related structures," Ph.D. dissertation, Department of Mathematics, Quaid-i-Azam University, Islamabad, Pakistan, 2011.

[10] T. Shah, N. Kausar, and I. Rehman, "Intuitionistics fuzzy normal subring over a non-associative ring," *The Journal of "Ovidius" University of Constanta*, vol. 20, no. 1, pp. 369–386, 2012.

[11] T. Shah, N. Kausar, and I. Rehman, "Intuitionistic fuzzy normal subrings over a non-associative ring," *An. Şt. Univ. Ovidius Constanta*, vol. 20, no. 1, pp. 369–386, 2012.

[12] R. Kellil, "On inverses of left almost semirings and strong left almost semirings," *Journal of Mathematical Sciences: Advances and Applications*, vol. 26, pp. 29–39, 2014.

[13] P. Yiarayong, S. Webchasad, and W. Dorchana, "The bi-ideals in left almost rings," *Asian Journal of Applied Sciences*, vol. 4, no. 5, pp. 1200–1208, 2016.