บทความวิจัย

ตัวแบบคณิตศาสตร์สำหรับการออมรายเดือนเพื่อการวางแผนการเงิน

นราธิป อิสรานุสรณ์
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏจันทรเกษม

* ผู้นิพนธ์ประสานงาน โทรศัพท์ 08 6966 7567 อีเมล: jo_zag11@hotmail.com DOI: 10.14416/j.kmutnb.2021.11.007
รับเมื่อ 9 ตุลาคม 2563 แก้ไขเมื่อ 1 ธันวาคม 2563 ตอบรับเมื่อ 7 ธันวาคม 2563 เผยแพร่ออนไลน์ 11 พฤศจิกายน 2564

บทคัดย่อ

การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์ 1) เพื่อสร้างตัวแบบคณิตศาสตร์สำหรับการออมรายเดือน ประกอบด้วยจำนวนเงินออมรายเดือน อัตราดอกเบี้ยต่อปี จำนวนครั้งของการทบต้นต่อปี และจำนวนปีของการออมเงิน 2) เพื่อแสดงจำนวนเงินที่คำนวณจากตัวแบบคณิตศาสตร์สำหรับการออมรายเดือน จากผลการวิจัยทำให้ได้ 1) ตัวแบบคณิตศาสตร์สำหรับการออมรายเดือน 4 ตัวแบบ คือ ตัวแบบการออมรายเดือนด้วยจำนวนเงินและอัตราดอกเบี้ยต่อปีแบบคงที่ ตัวแบบการออมรายเดือนด้วยจำนวนเงินแบบคงที่และอัตราดอกเบี้ยต่อปีแบบไม่คงที่ ตัวแบบการออมรายเดือนด้วยจำนวนเงินแบบไม่คงที่และอัตราดอกเบี้ยต่อปีแบบคงที่ ตัวแบบการออมรายเดือนด้วยจำนวนเงินและอัตราดอกเบี้ยต่อปีแบบไม่คงที่ และพิสูจน์ความถูกต้องของตัวแบบด้วยวิธีอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ 2) จำนวนเงินเมื่อครบสิ้นปีคำนวณจากตัวแบบคณิตศาสตร์สำหรับการออมรายเดือน โดยการกำหนดค่าเริ่มต้นต่างๆ ซึ่งเป็นตัวอย่างการจำลองสถานการณ์การออม เพื่อให้ประชาชนผู้ที่ต้องการวางแผนการเงินสำหรับอนาคต สามารถนำจำนวนเงินที่คำนวณได้ไปเปรียบเทียบกับจำนวนเงินจากการออมรูปแบบอื่นๆ ที่จะทำให้ได้รับจำนวนเงินที่เหมาะสมของแต่ละคน

คำสำคัญ: ตัวแบบคณิตศาสตร์ การออมรายเดือน ดอกเบี้ยทบต้น

การอ้างอิงบทความ: นราธิป อิสรานุสรณ์, "ตัวแบบคณิตศาสตร์สำหรับการออมรายเดือนเพื่อการวางแผนการเงิน," *วารสารวิชาการพระจอมเกล้าพระนครเหนือ*, ปีที่ 32, ฉบับที่ 2, หน้า 469–477, เม.ย.–มิ.ย. 2565.

Research Article

The Monthly Mathematical Model for Financial Planning

Naratip Issaranusorn*
Program of Mathematics, Faculty of Science, Chandrakasem Rajabhat University, Bangkok, Thailand

* Corresponding Author, Tel. 08 6966 7567, E–mail: jo_zag11@hotmail.com
DOI: 10.14416/j.kmutnb.2021.11.007
Received 9 October 2020; Revised 1 December 2020; Accepted 7 December 2020; Published online: 11 November 2021

Abstract

The objectives of this research are: 1) to create a monthly mathematical model for financial planning consisting of the monthly savings, the interest rate per year, the compounding times per year and the times of savings and 2) to demonstrate the returns calculated from the monthly mathematical model. The results show that: 1) There are 4 prototypes of the monthly mathematical model, i.e. the monthly model with the constant monthly savings and the interest rate per year; the monthly model with the constant monthly savings and the inconstant interest rate per year; the monthly model with the inconstant monthly savings and the constant interest rate per year; and the monthly model with the inconstant monthly savings and the interest rate per year. Those 4 prototypes are obtained and proved for the correctness by using mathematical induction. 2) The returns at the end of the year calculated from the monthly mathematical model are obtained for setting the initial values. It is the example of savings simulations for people who want to plan their finance for the future. They can compare the returns with the different types of savings which help them receive the suitable returns for particular person.

Keywords: Mathematical Model, Monthly Savings, Compound Interest

Please cite this article as: N. Issaranusorn, "The monthly mathematical model for financial planning," *The Journal of KMUTNB*, vol. 32, no. 2, pp. 469–477, Apr.–Jun. 2022 (in Thai).

1. บทนำ

จากสถานการณ์ที่เชื้อ Covid-19 แพร่ระบาด ไปทั่วโลก ทำให้เกิดการสูญเสียชีวิตและทรัพย์สิน โดยเฉพาะธุรกิจการท่องเที่ยวที่ต้องหยุดลงกลางคัน ส่งผลให้เกิดความเสียหายทางด้านเศรษฐกิจอย่างมาก ไม่เว้นแม้แต่ประเทศไทยที่ได้รับผลกระทบจากการแพร่ระบาดเช่นกัน รัฐบาลจึงต้องใช้วิธีการปิดประเทศ ปิดห้างสรรพสินค้า หรือธุรกิจบางประเภทของประชากรเพื่อเป็นการควบคุม และจำกัดพื้นที่ในการแพร่กระจายของเชื้อโรค ทำให้ประชากรบางส่วนไม่สามารถประกอบอาชีพ ไม่สามารถทำงานเพื่อหารายได้มาใช้จ่ายในครอบครัว จึงต้องนำเงินสำรองที่ออมไว้ในรูปแบบต่างๆ ออกมาใช้บรรเทาความเดือดร้อน แต่ก็มีประชากรบางกลุ่มแม้ว่าจะได้รับเงินช่วยเหลือจากรัฐบาลที่จัดสรรให้ก็ยังไม่เพียงพอต่อการดำรงชีวิต อาจจะเพราะว่าประชากรกลุ่มนั้นมีรายจ่ายมากกว่ารายรับ และไม่มีเงินออมที่จะสำรองไว้ใช้ในสถานการณ์ฉุกเฉิน ดังนั้นเพื่อเป็นการเตรียมเงินสำรองไว้ใช้ในอนาคต จะต้องเริ่มจากการวางแผนการเงิน ซึ่งจะทำให้เข้าใจสถานภาพทางการเงินของตัวเองได้ชัดเจน เกิดความมั่นคงทางการเงิน เสมือนเป็นเกราะป้องกันเมื่อเกิดเหตุการณ์ฉุกเฉินในอนาคต ทำให้มีความมั่นใจในการใช้ชีวิตมากขึ้น

The Stock Exchange of Thailand [1] มีแนวคิดเกี่ยวกับการวางแผนการเงินซึ่งเป็นวิธีการเตรียมความพร้อมที่จะทำให้เกิดความมั่นคงทางการเงิน เพราะจะต้องบริหารรายรับ และรายจ่ายให้สมดุลทุกวัน ทำให้สามารถวางแผนนำเงินในแต่ละวันไปออมได้ ซึ่งจะต้องปลูกฝังให้เด็กๆ และเยาวชนได้เรียนรู้วิธีการวางแผนการเงิน ให้รู้จักคุณค่าของเงิน และส่งเสริมให้เกิดวินัยการออมเงิน เพื่อเป็นการเตรียมความพร้อมเมื่อถึงคราวจำเป็นต้องใช้จ่ายเงินในอนาคต และเป็นการสำรองไว้เมื่อเกษียณอายุ

ประสาท [2] ศึกษาความสัมพันธ์ของการคิดดอกเบี้ยทบต้นกับการเติบโตแบบเลขชี้กำลัง ด้วยการนำทฤษฎีทางคณิตศาสตร์มาอธิบาย รวมถึงนำเสนอวิธีการคิดดอกเบี้ยทบต้น โดยเริ่มจากการใช้นิยามของ e^x จนได้ข้อสรุปเป็นสูตรในรูปทั่วไป และได้ให้แนวคิดว่า ถ้าเรามีเงินออม ดอกเบี้ยทบต้นจะทำงานให้เรา เนื่องจากดอกเบี้ยทบต้นทำงานทุกวันไม่มีวันหยุด ซึ่งนักคณิตศาสตร์เรียกการเติบโตของดอกเบี้ยทบต้นว่า “การเติบโตแบบเลขชี้กำลัง (Exponential Growth)”

นราธิป [3] สร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์เพื่อการออมเงินต้นปีและปลายปี 4 ตัวแบบ ด้วยมูลค่าเงินปัจจุบันแบบคงที่ ซึ่งใช้วิธีการคำนวณดอกเบี้ยทบต้นด้วยอัตราดอกเบี้ยต่อปีแบบคงที่และไม่คงที่ แสดงตัวอย่างการออมเงินโดยกำหนดอัตราดอกเบี้ยต่อปีแบบคงที่และไม่คงที่ จำนวนครั้งของการทบต้นต่อปี 1, 2 และ 3 ครั้ง จำนวนเงินออมรายปีแบบคงที่ คำนวณมูลค่าเงินใน 5 ปีข้างหน้า โดยใช้ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ และประยุกต์ใช้ตัวแบบในการคำนวณผลตอบแทนไปเปรียบเทียบกับผลิตภัณฑ์ประกันชีวิต และการออมรูปแบบอื่นๆ

นราธิป [4] สร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์เพื่อการออมเงินต้นปีและปลายปี 4 ตัวแบบ ซึ่งพัฒนามาจาก นราธิป [3] ด้วยมูลค่าเงินปัจจุบันแบบไม่คงที่ ซึ่งใช้วิธีการคำนวณดอกเบี้ยทบต้นด้วยอัตราดอกเบี้ยต่อปีแบบคงที่และไม่คงที่ แสดงตัวอย่างการออมเงินโดยกำหนดอัตราดอกเบี้ยต่อปีแบบคงที่และไม่คงที่ จำนวนครั้งของการทบต้นต่อปี 1, 2 และ 3 ครั้ง จำนวนเงินออมรายปีแบบไม่คงที่ คำนวณมูลค่าเงินใน 20 ปีข้างหน้า โดยใช้ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ และประยุกต์ใช้ตัวแบบในการคำนวณผลตอบแทนเพื่อไปเปรียบเทียบกับผลตอบแทนจากการออมประเภทเงินฝากประจำแบบออมไม่คงที่ หรือรูปแบบประกันชีวิตที่ออมหลายกรมธรรม์ด้วยเบี้ยประกันแบบไม่คงที่

นราธิป [5] สร้างตัวแบบคณิตศาสตร์เชิงกำหนดเพื่อการออมกลางปี 4 ตัวแบบ เพื่อใช้คำนวณหาจำนวนเงินเมื่อครบสิ้นปีใดๆ ที่มีการคำนวณดอกเบี้ยทบต้นแบบคงที่และไม่คงที่ แสดงตัวอย่างการออมเงินโดยกำหนดอัตราดอกเบี้ยต่อปีแบบคงที่และไม่คงที่ จำนวนครั้งของการทบต้นต่อปี 2, 4, 12 และ 365 ครั้ง จำนวนเงินออมรายปีแบบคงที่และไม่คงที่ คำนวณหาจำนวนเงินเมื่อครบสิ้นปีที่ 5, 10 ,15, 20 และ 30 โดยใช้ตัวแบบคณิตศาสตร์เชิงกำหนดเพื่อการออมกลางปี ได้ให้แนวคิดของการออมกลางปีสำหรับผู้ที่ไม่สามารถออมได้ในช่วงต้นปี หรือมีความจำเป็นต้องใช้เงินในช่วงเทศกาลต่างๆ

และแนะนำให้ใช้ตัวแบบคณิตศาสตร์เชิงกำหนดเพื่อการออมกลางปีร่วมกับ นราธิป [3], [4] จะทำให้การวิเคราะห์ผลตอบแทนกับการออมรูปแบบอื่นๆ มีความครอบคลุมมากขึ้น ตลอดจนการแสดงให้เห็นประโยชน์ของคณิตศาสตร์บริสุทธิ์ที่เป็นพื้นฐานที่จำเป็นต่อการได้ผลลัพธ์ทางคณิตศาสตร์ประยุกต์

Pournara [6] กล่าวว่า มีการยอมรับมากขึ้นว่า ความรู้ของครูที่สอนวิชาคณิตศาสตร์มีหลายแขนง และมีหัวข้อที่เฉพาะเจาะจง ประกอบกับไม่มีงานวิจัยมากพอในด้านการเรียนการสอน โดยเฉพาะด้านคณิตศาสตร์การเงิน รวมถึงการคิดดอกเบี้ยของครูที่จะสอนให้กับนักเรียน ทำให้ครูระดับมัธยมในทวีปแอฟริกาใต้จะต้องศึกษารายละเอียดเชิงทฤษฎีเกี่ยวกับคณิตศาสตร์การเงิน รวมถึงการเชื่อมโยงกับธนาคาร เพื่อเป็นฐานความรู้ของครูในการสอนนักเรียน เนื่องจากโรงเรียนในแอฟริกาใต้มีหลักสูตรคณิตศาสตร์การเงิน ที่เป็นองค์ประกอบสำคัญในการเรียนรู้ โดยเฉพาะการคิดดอกเบี้ยทบต้นที่เป็นพื้นฐานสำคัญในการสร้างผลตอบแทนจากการออมเงินที่จะฝึกให้นักเรียนสามารถคำนวณหาผลตอบแทนได้และเป็นวิธีการที่ให้นักเรียนคุ้นเคยกับเรื่องการออมเงิน

จากการทบทวนวรรณกรรมและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องซึ่งมีลักษณะการออมรายปี ปีละหนึ่งครั้ง ทำให้ผู้วิจัยสนใจแนวคิดในลักษณะการออมรายเดือน เดือนละหนึ่งครั้ง หรือปีละสิบสองครั้ง และนำแนวคิดนี้มาสร้างตัวแบบคณิตศาสตร์ประเภทตัวแบบเชิงกำหนดซึ่งมีวัตถุประสงค์ คือ 1) เพื่อสร้างตัวแบบคณิตศาสตร์สำหรับการออมรายเดือน ประกอบด้วยจำนวนเงินออมรายเดือน อัตราดอกเบี้ยต่อปี จำนวนครั้งของการทบต้นต่อปี และจำนวนปีของการออมเงิน 2) เพื่อแสดงจำนวนเงินที่คำนวณจากตัวแบบคณิตศาสตร์สำหรับการออมรายเดือน ซึ่งมีขอบเขตการวิจัย คือ ออมทุกเดือน เดือนละหนึ่งครั้งตอนต้นเดือน และจำนวนครั้งของการทบต้นต่อปีตั้งแต่ 2 ครั้งขึ้นไป

2. วัสดุ อุปกรณ์และวิธีการวิจัย

งานวิจัยนี้เป็นงานวิจัยที่พัฒนาองค์ความรู้ทางคณิตศาสตร์ประยุกต์ ประกอบด้วยตัวแบบการออม 4 ตัวแบบ แบ่งเป็น 4 ทฤษฎีบท โดยแต่ละทฤษฎีบทมีการพิสูจน์ความถูกต้องโดยใช้หลักการทางคณิตศาสตร์บริสุทธิ์ มีวิธีดำเนินการวิจัย ดังนี้

1) ศึกษาวิธีการวางแผนการเงินและการคิดดอกเบี้ยทบต้นของเงินออม รวมถึงบทความวิจัยเกี่ยวกับการสร้างตัวแบบคณิตศาสตร์สำหรับการออม เพื่อกำหนดหัวข้อและขอบเขตการทำวิจัย

2) กำหนดทฤษฎีบทแทนตัวแบบคณิตศาสตร์ สำหรับการออมรายเดือน ดังนี้

ทฤษฎีบท 1 ตัวแบบการออมรายเดือนด้วยจำนวนเงินและอัตราดอกเบี้ยต่อปีแบบคงที่

ทฤษฎีบท 2 ตัวแบบการออมรายเดือนด้วยจำนวนเงินแบบคงที่และอัตราดอกเบี้ยต่อปีแบบไม่คงที่

ทฤษฎีบท 3 ตัวแบบการออมรายเดือนด้วยจำนวนเงินแบบไม่คงที่และอัตราดอกเบี้ยต่อปีแบบคงที่

ทฤษฎีบท 4 ตัวแบบการออมรายเดือนด้วยจำนวนเงินและอัตราดอกเบี้ยต่อปีแบบไม่คงที่

3) สร้างตัวแบบคณิตศาสตร์สำหรับการออมรายเดือนที่สอดคล้องกับทฤษฎีบทและพิสูจน์ความถูกต้องโดยวิธีอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

4) กำหนดจำนวนเงินออมรายเดือน อัตราดอกเบี้ยต่อปี จำนวนครั้งของการทบต้นต่อปี และจำนวนปีของการออมเงิน แทนลงในตัวแบบคณิตศาสตร์สำหรับการออมรายเดือนและคำนวณหาจำนวนเงินเมื่อครบสิ้นปีที่กำหนด

5) อภิปรายและวิเคราะห์ผลเพื่อให้เกิดประโยชน์ในชีวิตจริงและสังเคราะห์แนวความคิดเพื่อให้เกิดงานวิจัยต่อไปในอนาคต

3. ผลการทดลอง

3.1 ตัวแบบคณิตศาสตร์สำหรับการออมรายเดือน

ผู้วิจัยกำหนดตัวแปรแทนจำนวนเงิน เมื่อครบสิ้นปีจากการออมรายเดือน ดังนี้

$S_1(n)$ แทน จำนวนเงินเมื่อครบสิ้นปีที่ n ด้วยจำนวนเงินและอัตราดอกเบี้ยต่อปีแบบคงที่

$S_2(n)$ แทน จำนวนเงินเมื่อครบสิ้นปีที่ n ด้วยจำนวนเงินแบบคงที่และอัตราดอกเบี้ยต่อปีแบบไม่คงที่

$S_3(n)$ แทน จำนวนเงินเมื่อครบสิ้นปีที่ n ด้วยจำนวนเงิน

แบบไม่คงที่และอัตราดอกเบี้ยต่อปีแบบคงที่

$S_4(n)$ แทน จำนวนเงินเมื่อครบสิ้นปีที่ n ด้วยจำนวนเงินและอัตราดอกเบี้ยต่อปีแบบไม่คงที่

รวมถึงกำหนดตัวแปรต่างๆ ที่ปรากฏในตัวแบบการออมรายเดือน ดังนี้

n แทน จำนวนปีของการออมเงิน

A แทน จำนวนเงินออมรายเดือนแบบคงที่

i แทน อัตราดอกเบี้ยต่อปีแบบคงที่

m แทน จำนวนครั้งของการทบต้นต่อปี

$A_{(j,t)}$ แทน จำนวนเงินออมรายเดือนปีที่ j เดือนที่ t โดยที่ $1 \le j \le n$ และ $1 \le t \le 12$

i_j, i_y แทน อัตราดอกเบี้ยต่อปี ปีที่ j และปีที่ y ตามลำดับ โดยที่ $1 \le j \le n$ และ $1 \le y \le n$

I_n, I แทน $\left(1+\frac{i_n}{m}\right)$ และ $\left(1+\frac{i}{m}\right)$ ตามลำดับ

จากการศึกษางานวิจัย นราธิป [3]–[5] ทำให้ผู้วิจัยได้แนวคิดของการสร้างตัวแบบคณิตศาสตร์สำหรับการออมรายเดือน ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1 ตัวแบบการออมรายเดือนด้วยจำนวนเงินและอัตราดอกเบี้ยต่อปีแบบคงที่

สำหรับ $n, m \in \mathbb{N}$ ซึ่ง $m \ge 2$ จะได้ดังสมการที่ (1)

$$S_1(n) = A\sum_{t=1}^{12}\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\left(\frac{12-(t-1)}{12}\right)m} \frac{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn}-1}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m}-1} \quad (1)$$

พิสูจน์

ให้ $n, m \in \mathbb{N}$ ซึ่ง $m \ge 2$

ถ้า $n = 1$ แล้ว จำนวนเงินเมื่อครบสิ้นปีที่ 1 คือ

$$S_1(1) = A\sum_{t=1}^{12}\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\left(\frac{12-(t-1)}{12}\right)m}$$

$$= A\sum_{t=1}^{12}\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\left(\frac{12-(t-1)}{12}\right)m} \frac{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m(1)}-1}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m}-1}$$

ให้ $n \ge 2$

สมมติจำนวนเงินเมื่อครบสิ้นปีที่ $n-1$ คือ

$$S_1(n-1) = A\sum_{t=1}^{12}\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\left(\frac{12-(t-1)}{12}\right)m} \frac{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m(n-1)}-1}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m}-1}$$

$$= A\sum_{t=1}^{12} I^{\left(\frac{12-(t-1)}{12}\right)m} \frac{I^{m(n-1)}-1}{I^m-1}$$

จากสมมติฐานเชิงอุปนัย (Induction Hypothesis) จะได้จำนวนเงินเมื่อครบสิ้นปีที่ n คือ

$$S_1(n)$$

$$= A\sum_{t=1}^{12} I^{\left(\frac{12-(t-1)}{12}\right)m} \frac{I^{m(n-1)}-1}{I^m-1} I^m + A\sum_{t=1}^{12} I^{Tm}$$

$$= A\sum_{t=1}^{12} I^{\left(\frac{12-(t-1)}{12}\right)m} \left(\frac{I^{mn}-I^m}{I^m-1}+1\right)$$

$$= A\sum_{t=1}^{12} I^{\left(\frac{12-(t-1)}{12}\right)m} \left(\frac{I^{mn}-1}{I^m-1}\right)$$

$$= A\sum_{t=1}^{12}\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\left(\frac{12-(t-1)}{12}\right)m} \left(\frac{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn}-1}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m}-1}\right)$$

ทฤษฎีบท 2 ตัวแบบการออมรายเดือนด้วยจำนวนเงินแบบคงที่และอัตราดอกเบี้ยต่อปีแบบไม่คงที่

สำหรับ $n, m \in \mathbb{N}$ ซึ่ง $m \ge 2$ จะได้ดังสมการที่ (2)

$$S_2(n) = A\sum_{j=1}^{n}\sum_{t=1}^{12}\left(1+\frac{i_j}{m}\right)^{\left(\frac{12-(t-1)}{12}\right)m} \prod_{y=j+1}^{n}\left(1+\frac{i_y}{m}\right)^{m} \quad (2)$$

พิสูจน์

ให้ $n, m \in \mathbb{N}$ ซึ่ง $m \ge 2$

ถ้า $n = 1$ แล้ว จำนวนเงินเมื่อครบสิ้นปีที่ 1 คือ

$$S_2(1) = A\sum_{t=1}^{12}\left(1+\frac{i_1}{m}\right)^{\left(\frac{12-(t-1)}{12}\right)m}$$

$$= A\sum_{j=1}^{1}\sum_{t=1}^{12}\left(1+\frac{i_j}{m}\right)^{\left(\frac{12-(t-1)}{12}\right)m} \prod_{y=2}^{1}\left(1+\frac{i_y}{m}\right)^{m}$$

ให้ $n \ge 2$

สมมติจำนวนเงินเมื่อครบสิ้นปีที่ $n-1$ คือ

$$S_2(n-1) = A\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{t=1}^{12}\left(1+\frac{i_j}{m}\right)^{\left(\frac{12-(t-1)}{12}\right)m}\prod_{y=j+1}^{n-1}\left(1+\frac{i_y}{m}\right)^m$$

$$= A\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{t=1}^{12} I_j^{\left(\frac{12-(t-1)}{12}\right)m}\prod_{y=j+1}^{n-1} I_y^m$$

จากสมมติฐานเชิงอุปนัย จะได้จำนวนเงินเมื่อครบสิ้นปีที่ n คือ

$S_2(n)$

$$= A\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{t=1}^{12} I_j^{\left(\frac{12-(t-1)}{12}\right)m}\prod_{y=j+1}^{n} I_y^m + \sum_{t=1}^{12} A I_n^{\left(\frac{12-(t-1)}{12}\right)m}$$

$$= A\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{t=1}^{12} I_j^{\left(\frac{12-(t-1)}{12}\right)m}\prod_{y=j+1}^{n} I_y^m$$

$$+ A\sum_{j=n}^{n}\sum_{t=1}^{12} I_j^{\left(\frac{12-(t-1)}{12}\right)m}\prod_{y=j+1}^{n} I_y^m$$

$$= A\sum_{j=1}^{n}\sum_{t=1}^{12} I_j^{\left(\frac{12-(t-1)}{12}\right)m}\prod_{y=j+1}^{n} I_y^m$$

$$= A\sum_{j=1}^{n}\sum_{t=1}^{12}\left(1+\frac{i_j}{m}\right)^{\left(\frac{12-(t-1)}{12}\right)m}\prod_{y=j+1}^{n}\left(1+\frac{i_y}{m}\right)^m$$

ทฤษฎีบท 3 ตัวแบบการออมรายเดือนด้วยจำนวนเงินแบบไม่คงที่และอัตราดอกเบี้ยต่อปีแบบคงที่

สำหรับ $n, m \in \mathbb{N}$ ซึ่ง $m \geq 2$ จะได้ดังสมการที่ (3)

$$S_3(n) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{t=1}^{12} A_{(j,t)}\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\left(\frac{12(n-(j-1))-(t-1)}{12}\right)m} \quad (3)$$

พิสูจน์

ให้ $n, m \in \mathbb{N}$ ซึ่ง $m \geq 2$

ถ้า $n = 1$ แล้ว จำนวนเงินเมื่อครบสิ้นปีที่ 1 คือ

$$S_3(1) = \sum_{t=1}^{12} A_{(1,t)}\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\left(\frac{12(1-(1-1))-(t-1)}{12}\right)m}$$

$$= \sum_{j=1}^{1}\sum_{t=1}^{12} A_{(j,t)}\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\left(\frac{12(1-(j-1))-(t-1)}{12}\right)m}$$

ให้ $n \geq 2$

สมมติจำนวนเงินเมื่อครบสิ้นปีที่ $n-1$ คือ

$$S_3(n-1) = \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{t=1}^{12} A_{(j,t)}\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\left(\frac{12((n-1)-(j-1))-(t-1)}{12}\right)m}$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{t=1}^{12} A_{(j,t)} I^{\left(\frac{12((n-1)-(j-1))-(t-1)}{12}\right)m}$$

จากสมมติฐานเชิงอุปนัย จะได้จำนวนเงินเมื่อครบสิ้นปีที่ n คือ

$S_3(n)$

$$= \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{t=1}^{12} A_{(j,t)}\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\left(\frac{12((n-1)-(j-1))-(t-1)}{12}\right)m}\left(1+\frac{i}{m}\right)^m$$

$$+\sum_{j=n}^{n}\sum_{t=1}^{12} A_{(n,t)}\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\left(\frac{12((n)-((n)-1))-(t-1)}{12}\right)m}$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{t=1}^{12} A_{(j,t)}\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\left(\frac{12((n)-(j-1))-(t-1)}{12}\right)m}$$

ทฤษฎีบท 4 ตัวแบบการออมรายเดือนด้วยจำนวนเงินและอัตราดอกเบี้ยต่อปีแบบไม่คงที่

สำหรับ $n, m \in \mathbb{N}$ ซึ่ง $m \geq 2$ จะได้ดังสมการที่ (4)

$S_4(n)$

$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{t=1}^{12} A_{(j,t)}\left(1+\frac{i_j}{m}\right)^{\left(\frac{12-(t-1)}{12}\right)m}\prod_{y=j+1}^{n}\left(1+\frac{i_y}{m}\right)^m \quad (4)$$

พิสูจน์

ให้ $n, m \in \mathbb{N}$ ซึ่ง $m \geq 2$

ถ้า $n = 1$ แล้ว จำนวนเงินเมื่อครบสิ้นปีที่ 1 คือ

$S_4(1)$

$$= \sum_{t=1}^{12} A_{(1,t)}\left(1+\frac{i_1}{m}\right)^{\left(\frac{12-(t-1)}{12}\right)m}$$

$$= \sum_{t=1}^{12} A_{(1,t)}\left(1+\frac{i_1}{m}\right)^{\left(\frac{12-(t-1)}{12}\right)m}\prod_{y=2}^{1}\left(1+\frac{i_y}{m}\right)^m$$

$$= \sum_{j=1}^{1}\sum_{t=1}^{12} A_{(j,t)}\left(1+\frac{i_j}{m}\right)^{\left(\frac{12-(t-1)}{12}\right)m}\prod_{y=j+1}^{1}\left(1+\frac{i_y}{m}\right)^m$$

ให้ $n \geq 2$

สมมติจำนวนเงินเมื่อครบสิ้นปีที่ $n-1$ คือ

$$S_4(n-1)$$

$$=\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{t=1}^{12}A_{(j,t)}\left(1+\frac{i_j}{m}\right)^{\left(\frac{12-(t-1)}{12}\right)m}\prod_{y=j+1}^{n-1}\left(1+\frac{i_y}{m}\right)^m$$

$$=\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{t=1}^{12}A_{(j,t)}I_j^{\left(\frac{12-(t-1)}{12}\right)m}\prod_{y=j+1}^{n-1}I_y^m$$

จากสมมติฐานเชิงอุปนัย จะได้จำนวนเงินเมื่อครบสิ้นปีที่ n คือ

$$S_4(n)$$

$$=\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{t=1}^{12}A_{(j,t)}I_j^{\left(\frac{12-(t-1)}{12}\right)m}\prod_{y=j+1}^{n}I_y^m+\sum_{t=1}^{12}A_{(n,t)}I_n^{\left(\frac{12-(t-1)}{12}\right)m}$$

$$=\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{t=1}^{12}A_{(j,t)}I_j^{\left(\frac{12-(t-1)}{12}\right)m}\prod_{y=j+1}^{n}I_y^m$$

$$+\sum_{j=n}^{n}\sum_{t=1}^{12}A_{(j,t)}I_j^{\left(\frac{12-(t-1)}{12}\right)m}\prod_{y=j+1}^{n}I_y^m$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\sum_{t=1}^{12}A_{(j,t)}I_j^{\left(\frac{12-(t-1)}{12}\right)m}\prod_{y=j+1}^{n}I_y^m$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\sum_{t=1}^{12}A_{(j,t)}\left(1+\frac{i_j}{m}\right)^{\left(\frac{12-(t-1)}{12}\right)m}\prod_{y=j+1}^{n}\left(1+\frac{i_y}{m}\right)^m$$

3.2 จำนวนเงินเมื่อครบสิ้นปีจากการออมรายเดือน

ในงานวิจัยนี้ ผู้วิจัยได้นำเสนอตัวแบบคณิตศาสตร์เพื่อการออมรายเดือนประเภทตัวแบบเชิงกำหนด 4 ทฤษฎีบท ซึ่งมีการพิสูจน์ความถูกต้องทุกทฤษฎีบทโดยวิธีอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ แต่ละทฤษฎีบทแทนลักษณะการออมแต่ละแบบและกำหนดค่าของตัวแปรต่างๆ ได้แก่ จำนวนเงินออมรายเดือน อัตราดอกเบี้ยต่อปี จำนวนครั้งของการทบต้นต่อปี และจำนวนปีของการออมเงิน ผู้วิจัยจำลองสถานการณ์ขึ้นมาเพื่อเป็นตัวอย่างหนึ่งของการออม โดยผู้วิจัยแสดงจำนวนเงินเมื่อครบสิ้นปีแสดงดังตารางที่ 1 คำนวณจากตัวแบบคณิตศาสตร์เพื่อการออมรายเดือนทั้ง 4 ทฤษฎีบทด้วยการกำหนดค่าเริ่มต้นต่างๆ ของตัวแปร ดังนี้

ในกรณีจำนวนเงินออมรายเดือนแบบคงที่ เดือนละ 1,000 บาท อัตราดอกเบี้ยต่อปีแบบคงที่ร้อยละ 2 ผู้วิจัยกำหนดให้ t แทน เดือนที่ 1–12 ของทุกปี นั่นคือ t = 1,2,3,...,11,12 เนื่องจากผู้วิจัยจำลองสถานการณ์การออมที่มีระยะเวลาออมเงิน 10 ปี หรือ 120 เดือน จึงใช้วิธีการมอดุโลเข้ามาช่วยกำหนดจำนวนเงินออมรายเดือน โดยจะมอดุโลด้วยจำนวนเต็มบวกใดก็ได้ จะได้ว่า $r \equiv t(\mathrm{mod}5)$ โดยที่ $1 \le r \le 5$ และให้ j แทน ปีที่ 1–10 นั่นคือ j = 1,2,3,...,9,10 ในกรณีจำนวนเงินออมรายเดือนแบบไม่คงที่เดือนละ $1{,}000 + 10(r-1)$ บาท อัตราดอกเบี้ยต่อปีแบบไม่คงที่ ร้อยละ $2 + 0.1(j-1)$ ต่อปี จำนวนครั้งของการทบต้นต่อปี 2, 12, 120, 365 และ 730 ครั้ง และจำนวนปีของการออมเงิน 10 ปี

ตารางที่ 1 จำนวนเงินเมื่อครบสิ้นปีที่ 1, 3, 5, 7 และ 10 หรือ สิ้นเดือนที่ 12, 36, 60, 84 และ 120 ตามลำดับ จำนวนครั้งของการทบต้นต่อปี 2, 12, 120, 356 และ 730 ครั้ง คำนวณโดยใช้ตัวแบบคณิตศาสตร์สำหรับการออมรายเดือน

Monthly model	***jt*** / ***m***	12	36	60	84	120
$S_1(n)$	2	12,130.25	37,127.11	63,138.95	90,206.96	132,883.60
	12	12,130.80	37,131.89	63,152.43	90,233.99	132,940.90
	120	12,130.90	37,132.76	63,154.88	90,238.89	132,951.23
	365	12,130.90	37,132.82	63,155.06	90,239.26	132,952.01
	730	12,130.91	37,132.84	63,155.11	90,239.35	132,952.20
$S_2(n)$	2	12,130.25	37,208.89	63,588.31	91,544.47	137,120.72
	12	12,130.80	37,214.39	63,605.97	91,584.55	137,222.39
	120	12,130.90	37,215.39	63,609.18	91,591.83	137,240.86
	365	12,130.90	37,215.46	63,609.42	91,592.37	137,242.24
	730	12,130.91	37,215.48	63,609.48	91,592.50	137,242.57
$S_3(n)$	2	12,342.44	37,848.42	64,399.63	91,988.08	135,536.89
	12	12,342.99	37,853.29	64,413.38	92,015.64	135,595.25
	120	12,343.09	37,854.18	64,415.87	92,020.63	135,605.83
	365	12,343.10	37,854.24	64,416.06	92,021.00	135,606.62
	730	12,343.10	37,854.26	64,416.10	92,021.09	135.606.81
$S_4(n)$	2	12,342.44	37,931.77	64,857.76	93,351.84	139,857.62
	12	12,342.99	37,937.38	64,875.77	93,392.71	139,961.29
	120	12,343.09	37,938.40	64,879.04	93,400.13	139,980.13
	365	12,343.10	37,938.47	64,879.28	93,400.68	139,981.53
	730	12,343.10	37,938.49	64,879.34	93,400.82	139,981.88

จากตารางที่ 1 แสดงให้ทราบถึงจำนวนเงินเมื่อครบสิ้นปีจากการที่ผู้วิจัยกำหนดค่าเริ่มต้นของตัวแปรซึ่งเป็นตัวอย่างหนึ่งของการจำลองสถานการณ์การออม เพื่อให้ผู้ออมได้ทราบถึงจำนวนเงินที่จะได้รับในอนาคต สามารถใช้เป็นข้อมูลประกอบการวิเคราะห์และตัดสินใจก่อนการออมจากเหตุการณ์นั้นๆ และหากต้องการจำนวนเงินที่จะได้รับในอนาคต ก็สามารถวางแผนเพื่อเตรียมจำนวนเงินออมรายเดือนได้ด้วยตัวแบบคณิตศาสตร์สำหรับการออมรายเดือน

4. อภิปรายผลและสรุป

1) จากการศึกษางานวิจัยของนราธิป [3]–[5] ที่มีลักษณะการออมรายปี ปีละหนึ่งครั้ง ทำให้ผู้วิจัยสนใจแนวคิดในการออมรายเดือน เดือนละหนึ่งครั้ง ซึ่งจะเป็นการออมอีกรูปแบบหนึ่งที่ผู้ออมจะต้องเพิ่มความรับผิดชอบ ความมีระเบียบวินัยต่อตนเองในการออมมากขึ้น ซึ่งผู้วิจัยสร้างทฤษฎีบทแทนลักษณะการออม 4 ทฤษฎีบท ประกอบด้วยตัวแปร คือ จำนวนเงินออมรายเดือน อัตราดอกเบี้ยต่อปี จำนวนครั้งของการทบต้นต่อปี และจำนวนปีของการออมเงิน

2) จากการพิสูจน์ทฤษฎีบท 1–4 โดยวิธีอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ทำให้ได้ตัวแบบที่สามารถใช้คำนวณหาจำนวนเงินเมื่อครบสิ้นปีใดๆ จากการออมรายเดือน ในทางกลับกัน หากกำหนดจำนวนเงินเมื่อครบสิ้นปีใดๆ ก็สามารถคำนวณหาจำนวนเงินออมรายเดือนได้เช่นกัน

3) จากตารางที่ 1 แสดงจำนวนเงินเมื่อครบสิ้นปีที่ 1, 3, 5, 7 และ 10 หรือ สิ้นเดือนที่ 12, 36, 60, 84 และ 120 ตามลำดับ จำนวนครั้งของการทบต้นต่อปี 2, 12, 120, 365 และ 730 ครั้ง คำนวณโดยใช้ตัวแบบคณิตศาสตร์สำหรับการออมรายเดือน ซึ่งเป็นการจำลองสถานการณ์ให้ผู้ออมได้ทราบถึงจำนวนเงินที่จะได้รับในอนาคต เป็นข้อมูลประกอบการวิเคราะห์และตัดสินใจต่อการออมนั้นๆ และประชาชนทั่วไปสามารถวางแผนการออมรายเดือนได้ โดยกำหนดค่าเริ่มต้นต่างๆ ลงในตัวแบบคณิตศาสตร์สำหรับการออมรายเดือนเพื่อนำจำนวนเงินที่คำนวณได้ไปเปรียบเทียบกับจำนวนเงินจากการออมรูปแบบอื่นๆ ทั้งหมดนี้เป็นการวางแผนการเงินที่สามารถกระทำได้ด้วยตนเองเพื่อให้ได้ผลตอบแทนที่เหมาะสมของแต่ละคน

4) การที่สามารถใช้ตัวแบบคณิตศาสตร์สำหรับการออมรายเดือนคำนวณได้ด้วยตนเองที่บ้านเพื่อหาจำนวนเงินที่จะได้รับจากการออม จะสามารถช่วยครอบครัว ญาติพี่น้องวิเคราะห์ ตัดสินใจต่อการออมได้อย่างเต็มที่ ไม่ต้องกังวลในสถานการณ์ที่มีโรคระบาด ว่าจะใช้เวลามากเกินไปในการทำธุรกรรม ติดต่อสอบถามข้อมูลกับเจ้าหน้าที่ อีกทั้งยังเป็นการช่วยลดเวลาเดินทาง ลดการพบเจอผู้คน ลดอัตราเสี่ยงต่อการได้รับเชื้อโรคเข้าสู่ร่างกาย และเป็นการป้องกันร่างกายจากการเจ็บป่วยได้

5) งานวิจัยเรื่องนี้เป็นงานวิจัยเชิงประยุกต์ที่ใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์บริสุทธิ์มาพิสูจน์ทฤษฎีบททางคณิตศาสตร์ประยุกต์ แสดงให้เห็นถึงความสอดคล้องและความสัมพันธ์ระหว่างคณิตศาสตร์บริสุทธิ์และคณิตศาสตร์ประยุกต์ ผู้อ่านสามารถศึกษาความรู้เพิ่มเติมเพื่อพัฒนาองค์ความรู้ด้านคณิตศาสตร์ หรือศึกษาต่อทางด้านคณิตศาสตร์การเงินเพื่อประกอบเป็นอาชีพต่างๆ ได้ เช่น นักวางแผนการเงิน ครูอาจารย์

6) จากการศึกษา [1] และ [6] ให้แนวคิดต่อผู้วิจัยว่า จะต้องเริ่มปลูกฝังเรื่องการวางแผนการเงินตั้งแต่เด็กนักเรียนที่เป็นเยาวชนของชาติและสอนให้ตระหนักถึงการใช้จ่ายเงินอย่างคุ้มค่าและเกิดประโยชน์สูงสุด สอนให้รู้จักการจดบันทึกรายรับรายจ่ายในการบริหารเงินให้สมดุล ส่งเสริมให้มีอุปนิสัยในการออม ทั้งนี้ ทุกสถาบันต้องร่วมมือกันอย่างจริงจัง ไม่ว่าจะเป็นสถาบันการศึกษาซึ่งครูจะต้องสอนเรื่องคณิตศาสตร์การเงิน การคิดดอกเบี้ยให้นักเรียนมีความรู้ความเข้าใจอย่างแท้จริง สถาบันการเงินของรัฐบาลและเอกชนที่ผู้บริหารจะต้องคิดผลิตภัณฑ์การออมเงินเพื่อเป็นแรงจูงใจและผลักดันให้นักเรียน เยาวชนรู้สึกสนใจออมเงินโดยเฉพาะอย่างยิ่งสถาบันครอบครัวที่พ่อแม่ ญาติพี่น้องจะต้องสนับสนุนการออมอย่างจริงจัง ดังนั้นแล้วเยาวชนที่จะเติบโตขึ้นมาในอนาคต ก็จะมีคุณภาพชีวิตที่ดี เพราะมีเงินสำรองไว้บรรเทาความเดือดร้อนต่างๆ ต่อไป

5. กิตติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยขอขอบพระคุณมหาวิทยาลัยราชภัฏจันทรเกษมที่พิจารณาเห็นถึงความสำคัญของหัวข้อวิจัย ตลอดจนให้ทุนสนับสนุนการทำวิจัยนี้ และผู้ทรงคุณวุฒิที่พิจารณางานวิจัยนี้เป็นอย่างสูงที่ให้คำแนะนำซึ่งเป็นประโยชน์จนทำให้บทความวิจัยนี้มีความสมบูรณ์ อันนำไปสู่การสร้างประโยชน์ให้กับผู้อ่านที่ได้นำไปใช้ในชีวิตจริง รวมถึงเป็นการสร้างแรงบันดาลใจ แนวความคิดต่อผู้วิจัยเพื่อคิดค้นการทำผลงานวิจัยในครั้งต่อไป

เอกสารอ้างอิง

[1] The Stock Exchange of Thailand. (2015). *Financial Planning*. [Online]. Available: http:// www.set.or.th/education/th/start/start_start.pdf

[2] P. Meetam, (2009, May). *Compound Interest The Most Powerful in The World*. [Online]. Available: http://lib.edu.chula.ac.th/FILEROOM/CU_FORMJOURNAL/DRAWER001/GENERAL/DATA0012/00012267.PDF

[3] N. Issaranusorn, “Future saving model by using mathematical technique,” in *Proceedings of the 2th National and International Research Conference*, Thailand, 2015, pp. 426–435 (in Thai).

[4] N. Issaranusorn, “Saving mathematical model with inconstant present value and inconstant compound interest rate,” in *Inter-Proceedings of International Congress on Banking, Economics, Finance and Business*. Japan, 2016, pp. 241–251.

[5] N. Issaranusorn, “The deterministic mathematical model for midyear of savings with compound interest rate,” *The Journal of KMUTNB*, vol. 30, no. 2, pp. 304–313, 2020 (in Thai).

[6] C. Pournara, “Teachers’ knowledge for teaching compound interest,” *Pythagoras*, vol. 34, no. 2, pp. 1–10, 2013.