บทความวิจัย

ความแกร่งของแผนภูมิควบคุม χ CUSUM และ CP CUSUM โดยใช้ค่า FIR ในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงการกระจายของกระบวนการ

สุกัญญา พันธุ
คณะวิทยาศาสตร์ พลังงาน และสิ่งแวดล้อม มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ วิทยาเขตระยอง
เสาวณิต สุขภารังษี*
ภาควิชาสถิติประยุกต์ คณะวิทยาศาสตร์ประยุกต์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ

* ผู้นิพนธ์ประสานงาน โทรศัพท์ 0 2555 2000 ต่อ 1003 อีเมล: saowanit.s@sci.kmutnb.ac.th DOI: 10.14416/j.kmutnb.2020.01.002
รับเมื่อ 7 สิงหาคม 2562 แก้ไขเมื่อ 17 กันยายน 2562 ตอบรับเมื่อ 23 กันยายน 2562 เผยแพร่ออนไลน์ 15 มกราคม 2563
© 2020 King Mongkut's University of Technology North Bangkok. All Rights Reserved.

บทคัดย่อ

การควบคุมคุณภาพเชิงสถิติเกี่ยวข้องกับการตรวจจับสิ่งรบกวนกระบวนการ โดยสิ่งรบกวนนั้นอาจเกิดจากการเปลี่ยนแปลงในค่าเฉลี่ยหรือค่าการกระจายของกระบวนการ งานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาความแกร่งของแผนภูมิควบคุม χ CUSUM และแผนภูมิควบคุม CP CUSUM โดยการกำหนดค่าเริ่มต้นของตัวสถิติ CUSUM เพื่อให้เกิดการตอบสนองอย่างรวดเร็วจากการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงการกระจายของกระบวนการหรือค่า Head Start (HS) เท่ากับ 25%, 50% และ 75% ของขีดจำกัดควบคุม โดยวัดประสิทธิภาพในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงจากค่าความยาวรันเฉลี่ยเมื่อกระบวนการไม่อยู่ภายใต้การควบคุม (Out-of-Control Average Run Length; ARL_1) โดยแผนภูมิควบคุมที่มีประสิทธิภาพดีสุดจะให้ค่า ARL_1 ต่ำสุด โดยเปรียบเทียบประสิทธิภาพแผนภูมิควบคุม χ CUSUM กับแผนภูมิควบคุม CP CUSUM ในงานวิจัยนี้ศึกษาเมื่อกระบวนการมีการแจกแจงลาปลาซ (0,2) การแจกแจงลอจิสติก (2,2) และการแจกแจงแกมมา (9,1) ผลการวิจัยได้จากการจำลองแบบมอนติคาร์โล 10,000 รอบ พบว่า เมื่อขนาดการเปลี่ยนแปลงในการกระจายของกระบวนการมีขนาดเล็ก แผนภูมิควบคุม χ CUSUM สามารถตรวจจับได้เร็วกว่าแผนภูมิควบคุม CP CUSUM เมื่อใช้กำหนด HS เท่ากับ 75% ของขีดจำกัดควบคุม และมีความแกร่งต่อกระบวนการที่มีการแจกแจงแบบสมมาตรและไม่สมมาตรทุกระดับค่า ARL_0

คำสำคัญ: การตอบสนองอย่างรวดเร็ว ความยาวรันเฉลี่ย การแจกแจงไม่สมมาตร ความแกร่ง

การอ้างอิงบทความ: สุกัญญา พันธุ และ เสาวณิต สุขภารังษี, "ความแกร่งของแผนภูมิควบคุม χ CUSUM และ CP CUSUM โดยใช้ค่า FIR ในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงการกระจายของกระบวนการ," *วารสารวิชาการพระจอมเกล้าพระนครเหนือ*, ปีที่ 30, ฉบับที่ 2, หน้า 291–303, เม.ย.–มิ.ย. 2563.

วารสารวิชาการพระจอมเกล้าพระนครเหนือ ปีที่ 30, ฉบับที่ 2 เม.ย.–มิ.ย. 2563
The Journal of KMUTNB., Vol. 30, No. 2, Apr.–Jun. 2020

Research Article

Robustness of χ CUSUM and CP CUSUM Using Fast Initial Response in Detecting of Process Dispersion

Suganya Phantu
Faculty of Sciences, Energy and Environment, King Mongkut's University of Technology North Bangkok, Rayong Campus, Rayong, Thailand
Saowanit Sukparungsee*
Department of Applied Statistics, Faculty of Applied Science, King Mongkut's University of Technology North Bangkok, Bangkok, Thailand

* Corresponding Author, Tel. 0 2555 2000 Ext. 1003, E–mail: saowanit.s@sci.kmutnb.ac.th DOI: 10.14416/j.kmutnb.2020.01.002
Received 7 August 2019; Revised 17 September 2019; Accepted 23 September 2019; Published online: 15 January 2020
© 2020 King Mongkut's University of Technology North Bangkok. All Rights Reserved.

Abstract

Statistical quality control relates with monitoring of process disturbances which they may be caused by changing either mean or dispersion process. The aim of this research is to study the robustness of chi-cumulative sum (χ CUSUM) and CP CUSUM charts by giving an initial value of CUSUM statistics in order to quick detect a change in process dispersion. The Fast Initial Response (FIR) or Head Start (HS) are given to 25%, 50% and 75% of control limit of control chart. The performance of control chart is usually measured by an out of control Average Run Length (ARL_1) where the best performance of control chart will give the minimum ARL_1. The performance of χ CUSUM and CP CUSUM control charts are compared when the processes are distributed Laplace(0,2), Logistic(2,2) and Gamma(9,1). The numerical results are carried out by Monte Carlo simulation with replication 10,000 times. We found that the performance of χ CUSUM is superior to CP CUSUM for small shifts in dispersion parameter, otherwise the CP CUSUM performs better than χ CUSUM for moderate to large shifts with using 75% HS. In addition, those control charts are robust to symmetric and asymmetric distributions of process for all level of ARL_0.

Keywords: Fast Initial Response, Average Run Length, Asymmetric Distribution, Robustness

Please cite this article as: S. Phantu and S. Sukparungsee, "Robustness of χ CUSUM and CP CUSUM using fast initial response in detecting of process dispersion," *The Journal of KMUTNB*, vol. 30, no. 2, pp. 291–303, Apr.–Jun. 2020 (in Thai).

1. บทนำ

การควบคุมคุณภาพทางสถิติ (Statistical Quality Control; SQC) เป็นเครื่องมือในการควบคุมคุณภาพที่มีประโยชน์และสำคัญเป็นอย่างยิ่งในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงของกระบวนการ ได้รับความนิยมอย่างแพร่หลายในด้านอุตสาหกรรม การแพทย์ การเงิน ภูมิศาสตร์ และอื่นๆ มีวัตถุประสงค์เพื่อควบคุมผลิตภัณฑ์ให้มีคุณภาพเป็นมาตรฐานเดียวกัน ทำให้ผลิตภัณฑ์นั้นเป็นที่ยอมรับและมีความน่าเชื่อถือสำหรับผู้บริโภค แต่ในทางปฏิบัติกระบวนการผลิตอาจเกิดการผันแปรที่ส่งผลต่อคุณภาพของผลิตภัณฑ์ แบ่งออกเป็น 2 ประเภท ได้แก่ การผันแปรจากสาเหตุธรรมชาติ (Natural Cause Variation) เป็นการเปลี่ยนแปลงที่เกิดขึ้นตามธรรมชาติซึ่งไม่สามารถควบคุมได้ และเป็นการเปลี่ยนแปลงที่ยังถือว่ากระบวนการอยู่ภายใต้การควบคุม (In Control) และการผันแปรจากสาเหตุเจาะจง (Special Cause Variation) เป็นการเปลี่ยนแปลงที่เกิดขึ้นเป็นครั้งคราวและส่งผลให้กระบวนการอยู่นอกเหนือการควบคุม (Out of Control) ดังนั้นกระบวนการผลิตจึงใช้เครื่องมือทางสถิติในการควบคุมคุณภาพของกระบวนการผลิต เพื่อให้ผลิตภัณฑ์ที่ได้มีคุณภาพตรงตามมาตรฐาน ซึ่งเครื่องมือที่ใช้ในการควบคุมคุณภาพมี 7 ชนิด ได้แก่ แผนภาพเหตุและผล แผนภูมิพาเรโต แผ่นตรวจสอบ แผนภาพการกระจาย และแผนภูมิควบคุม (Montgomery) [1] โดยเครื่องมือที่นิยมใช้กันอย่างแพร่หลาย คือ แผนภูมิควบคุม (Control Chart) เนื่องจากเป็นเครื่องมือที่มีประสิทธิภาพ และสามารถแสดงผลได้ชัดเจนโดยกราฟ ซึ่งมีแผนภูมิควบคุมที่ใช้ในการตรวจจับผันแปร เช่น แผนภูมิควบคุมส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (S Chart) และแผนภูมิควบคุมค่าพิสัย (R Chart) ซึ่งเป็นแผนภูมิที่อาศัยแนวคิดจาก Shewhart [2] มีประสิทธิภาพดีเมื่อเกิดการเปลี่ยนแปลงขนาดใหญ่ ซึ่งประสิทธิภาพในการตรวจจับของแผนภูมิจะลดลงเมื่อขนาดการเปลี่ยนแปลงมีขนาดเล็ก เนื่องจากไม่ให้ความสำคัญกับข้อมูลในอดีต ในปี ค.ศ. 1954 Page [3] ได้นำเสนอแผนภูมิควบคุมผลรวมสะสม (Cumulative Sum Chart; CUSUM) ซึ่งใช้ข้อมูลตลอดช่วงเวลาของการจัดเก็บมาประกอบการตัดสินใจ เป็นแผนภูมิควบคุมที่ไวต่อการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงขนาดเล็ก และในปี ค.ศ. 1959 Roberts [4] ได้เสนอแผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่แบบถ่วงน้ำหนักแบบชี้กำลัง (Exponentially Weighted Moving Average Chart; EWMA) เป็นแผนภูมิควบคุมที่ให้ความสำคัญกับข้อมูลแต่ละช่วงเวลาไม่เท่ากัน โดยให้ความสำคัญกับข้อมูลในอดีตแบบเลขชี้กำลัง ซึ่งแผนภูมิทั้ง 2 แผนภูมิ เป็นทางเลือกที่ดีในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงที่มีขนาดเล็ก

โดยทั่วไปข้อสมมติฐานเบื้องต้นเกี่ยวกับค่าสังเกตของกระบวนการนั้นมักมีการแจกแจงปรกติ แต่ในความเป็นจริงข้อมูลส่วนใหญ่ที่ได้จากกระบวนการผลิต อาจจะไม่เป็นไปตามข้อสมมติฐานเบื้องต้น หรือในทางปฏิบัติค่าสังเกตของกระบวนการอาจไม่ทราบค่าพารามิเตอร์ หรือการแจกแจงของประชากร ซึ่งลักษณะดังกล่าวจำเป็นต้องอาศัยการประมาณค่าพารามิเตอร์ของกระบวนการ เช่น ค่าเฉลี่ย หรือความแปรปรวน บางสถานการณ์การศึกษาการเปลี่ยนแปลงของค่าเฉลี่ยอาจไม่สามารถบอกลักษณะการเปลี่ยนแปลงของข้อมูลได้อย่างชัดเจน Acosta-Mejia และคณะ [5] ศึกษาการเปลี่ยนแปลงความแปรปรวนของข้อมูล เนื่องจากการเพิ่มขึ้นของความแปรปรวน หมายถึง กระบวนการเกิดการกระจายสูงขึ้น ส่งผลต่อกระบวนการผลิตที่มีการเปลี่ยนแปลงในระดับที่มากขึ้น และการลดลงของความแปรปรวน หมายถึง กระบวนการเกิดการกระจายน้อยส่งผลให้กระบวนการผลิตที่มีการเปลี่ยนแปลงเข้าใกล้สภาวะคงที่

งานวิจัยที่ผ่านมาศึกษาลักษณะการเปลี่ยนแปลงความแปรปรวนของกระบวนการ เพื่อใช้ในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงความแปรปรวนของกระบวนการ ได้แก่ Tuprah และ Ncube [6] ศึกษาประสิทธิภาพการกระจายของข้อมูลจากส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของแผนภูมิควบคุม CUSUM ซึ่งใช้ค่า ARL_1 เป็นเกณฑ์ในการวัดประสิทธิภาพ ต่อมา Ng [7] ศึกษาการกระจายของข้อมูลจากความแปรปรวนด้วยแผนภูมิควบคุม EWMA และเปรียบเทียบกับวิธีการของ Crowder และ Hamilton [8] จากนั้น Chang และ Gan [9] ได้นำเสนอวิธีการเพิ่มประสิทธิภาพในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงกระบวนการของแผนภูมิควบคุมโดยใช้การตอบสนองอย่างรวดเร็ว (Fast Initial Response; FIR) และได้นำค่า FIR ไปใช้

กับแผนภูมิควบคุม CUSUM โดย Lucus และ Crosier [10] ในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงความแปรปรวนของกระบวนการ ต่อมามีการปรับปรุงประสิทธิภาพให้ดีขึ้นโดย Steiner [11] เพื่อลดเวลาในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลง ถ้ามีการเปลี่ยนแปลงเกิดขึ้นในกระบวนการ ค่า FIR จะช่วยให้แผนภูมิควบคุม CUSUM ตอบสนองต่อการเปลี่ยนแปลงได้เร็วขึ้น ต่อจากนั้น Hawkins และ Olwell [12] ได้ปรับปรุงการใช้ค่า FIR ในการหาประสิทธิภาพของแผนภูมิควบคุม CUSUM แบบสองด้าน เมื่อกระบวนการมีการเปลี่ยนแปลงเพิ่มมากขึ้น และถูกพัฒนาประสิทธิภาพการใช้ค่า FIR กับการแปลงข้อมูลด้วยอนุกรมในช่วงเวลา t โดย Haq [13]

ต่อมา Sanusi และคณะ [14] ได้ใช้ค่า FIR ในการปรับปรุงงานวิจัยของ Acosta-Mejia และคณะ [5] โดยศึกษาแผนภูมิ CUSUM ที่เปลี่ยนแปลงรูปแบบเป็นแผนภูมิควบคุม χ CUSUM และแผนภูมิควบคุม CP CUSUM โดยการปรับข้อมูลให้ลู่เข้าสู่การแจกแจงปรกติ ซึ่งเกณฑ์ที่ใช้ในการวัดประสิทธิภาพ คือ ค่าความยาวรันเฉลี่ย (Average Run Length; ARL) ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของความยาวรันเฉลี่ย (Standard Deviation of Run Length; SDRL) พบว่าแผนภูมิควบคุม CP CUSUM ที่ใช้ค่าเริ่มต้นด้วย FIR ที่ระดับต่างๆ มีประสิทธิภาพในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงดีสุด เมื่อกระบวนการเกิดการเปลี่ยนแปลงทั้งขนาดเล็กและขนาดใหญ่ และต่อมา รวีวลี และคณะ [15] ได้ศึกษาประสิทธิภาพของแผนภูมิควบคุมทูคีย์-ผลรวมสะสม (Tukey-Cumulative Sum Control Chart; CUSUM-TCC) เพื่อตรวจจับการเปลี่ยนแปลงการกระจายของข้อมูลของกระบวนการ

จากประเด็นที่กล่าวมาข้างต้น ผู้วิจัยจึงศึกษาความแกร่งของแผนภูมิควบคุม χ CUSUM และแผนภูมิควบคุม CP CUSUM โดยใช้ค่า FIR เพื่อการตอบสนองอย่างรวดเร็วในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลง เมื่อกระบวนการมีการแจกแจงลาปลาซ (Laplace Distribution) และการแจกแจงลอจิสติก (Logistic Distribution) ซึ่งมีลักษณะสมมาตร การแจกแจงแกมมา (Gamma Distribution) ซึ่งมีลักษณะไม่สมมาตร โดยพิจารณาค่าความยาวรันเฉลี่ยเมื่อกระบวนการไม่อยู่ภายใต้การควบคุม (Out of Control Average Run Length; ARL_1) เป็นเกณฑ์ในการวัดประสิทธิภาพ โดยแผนภูมิควบคุมใดให้ค่า ARL_1 ต่ำสุด แสดงว่าแผนภูมิควบคุมนั้นมีประสิทธิภาพในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงดีสุด

2. แผนภูมิควบคุมและวิธีการวิจัย

ในงานวิจัยนี้ศึกษาและเปรียบเทียบประสิทธิภาพของแผนภูมิควบคุม CUSUM, χ CUSUM และ CP CUSUM โดยใช้ความยาวรันเฉลี่ยเป็นตัววัดประสิทธิภาพในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงความผันแปรของกระบวนการ ดังนี้

2.1 แผนภูมิควบคุม (Control Charts)

แผนภูมิควบคุมที่ใช้ในงานวิจัยนี้ คือ แผนภูมิควบคุม CUSUM, χ CUSUM และ CP CUSUM มีรายละเอียดดังต่อไปนี้

2.1.1 แผนภูมิควบคุมรวมสะสม (Cumulative Sum Control Chart; CUSUM)

แผนภูมิ CUSUM เป็นแผนภูมิที่สามารถตรวจจับการเปลี่ยนแปลงทั้งในค่าเฉลี่ยและความผันแปรได้ดี เมื่อขนาดการเปลี่ยนแปลงมีขนาดเล็ก ซึ่งสามารถปรับให้เป็นค่ามาตรฐานของตัวสถิติ CUSUM ได้ เรียกว่า สถิติ CUSUM มาตรฐาน (Standardized CUSUM) ซึ่งการทำเป็นค่ามาตรฐานเป็นทางเลือกหนึ่งเพื่อปรับกระบวนการที่มีการแจกแจงแบบอื่นๆ ลู่เข้าสู่การแจกแจงปรกติ กำหนดให้ $\overline{x}_i$ เป็นค่าเฉลี่ยของตัวอย่างขนาด (n) จากการแจกแจงปรกติที่มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ μ_0 และความแปรปรวนเท่ากับ σ_0^2 โดย Standardized CUSUM มีค่าดังสมการที่ (1)

$$\begin{aligned} C_i^- &= \max(0, -Z_i - k + C^-_{i-1}) \; ; \; i = 1,2,...,n \\ C_i^+ &= \max(0, Z_i - k + C^+_{i-1}) \;\; ; \; i = 1,2,...,n \end{aligned} \tag{1}$$

กำหนดให้ $Z_i = (\overline{x}_i - \mu_0) / (\sigma_0 / \sqrt{n})$ ค่าเริ่มต้นของตัวสถิติ CUSUM มีค่าดังนี้ $C_i^+ = C_i^- = 0$ และค่าอ้างอิง $k = \dfrac{\delta\sigma_0}{2} \Big/ \sqrt{n}$

σ_0 คือส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของกระบวนการกรณี

ไม่เกิดการเปลี่ยนแปลง

δ คือระดับการเปลี่ยนแปลงของค่าความผันแปรของกระบวนการ

2.1.2 แผนภูมิควบคุมไค-ผลรวมสะสม (χ-Cumulative Sum Control Chart; χ CUSUM)

แผนภูมิควบคุม χ CUSUM ถูกพัฒนาขึ้นโดย Wilsson และ Hilferty [16] ซึ่งแสดงให้เห็นว่า $\sqrt[3]{\chi_n^2/n}$ ประมาณได้ด้วยการแจกแจงปรกติ กำหนดให้ $\mu = (1-2/9n),\ \sigma^2 = 2/9n$ เมื่อ $\sigma = \sigma_0$ และค่า χ_i แสดงได้ดังสมการที่ (2)

$$\chi_i = \frac{((s_i^2/\sigma_0^2)^{1/3} - (1-2/9(n-1))}{\sqrt{2/9(n-1)}} \sim N(0,1) \quad (2)$$

เมื่อ s_i^2 คือความแปรปรวนของตัวอย่างที่ i

σ_0^2 คือความแปรปรวนของกระบวนการเมื่อกระบวนการอยู่ภายใต้การควบคุม

n คือขนาดตัวอย่าง

จากสมการที่ (1) แทน Z_i ด้วย χ_i จากสมการที่ (2) ดังนั้นตัวสถิติ χ CUSUM มีค่าดังสมการที่ (3)

$$\begin{aligned} C_i^- &= \max(0, -\chi_i - k_1 + C_{i-1}^-) \ ; i = 1,2,...,n \\ C_i^+ &= \max(0, \chi_i - k_2 + C_{i-1}^+) \quad ; i = 1,2,...,n \end{aligned} \quad (3)$$

เมื่อ k_1 และ k_2 คือค่าอ้างอิงของตัวสถิติ C_i^+ และ C_i^- ตามลำดับ ของแผนภูมิ χ CUSUM

σ_0 คือส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของกระบวนการกรณีไม่เกิดการเปลี่ยนแปลง

σ_1 คือส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของกระบวนการที่เกิดการเปลี่ยนแปลงเพิ่มขึ้น

σ_2 คือส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของกระบวนการที่เกิดการเปลี่ยนแปลงลดลง

เมื่อกำหนดให้

$$k_1 = \frac{1}{2}\left\{E\left(\chi_i|\sigma_0\right) + E\left(\chi_i|\sigma_1\right)\right\}$$
$$= \frac{1}{2}\left\{\left[(\sigma_1^2/\sigma_0^2)^{\frac{1}{3}} - 1\right]\left[1 - \frac{2}{9(n-1)}\right] \Big/ \sqrt{\frac{2}{9(n-1)}}\right\}$$

และ

$$k_2 = \frac{1}{2}\left\{E\left(-\chi_i|\sigma_0\right) + E\left(-\chi_i|\sigma_2\right)\right\}$$
$$= \frac{1}{2}\left\{\left[1 - (\sigma_2^2/\sigma_0^2)^{\frac{1}{3}}\right]\left[1 - \frac{2}{9(n-1)}\right] \Big/ \sqrt{\frac{2}{9(n-1)}}\right\}$$

โดยขีดจำกัดของแผนภูมิควบคุม χ CUSUM คือขีดจำกัดควบคุมบน $UCL_{\chi\ CUSUM} = h_1$ และขีดจำกัดควบคุมล่าง $LCL_{\chi\ CUSUM} = 0$

2.1.3 แผนภูมิควบคุมผลรวมสะสมจุดเปลี่ยน (Change Point Cumulative Sum Control Chart; CP CUSUM)

แผนภูมิควบคุม CP CUSUM เป็นการทดสอบอัตราส่วนภาวะน่าจะเป็นสำหรับจุดที่เกิดการเปลี่ยนแปลงความแปรปรวนของกระบวนการที่มีการแจกแจงปรกติ ตัวสถิติ CP CUSUM แสดงได้ดังสมการที่ (4)

$$\begin{aligned} C_i^- &= \max(0, -Z_i^2 - nk_2 + C_{i-1}^-) \ ; i = 1,2,...,n \\ C_i^+ &= \max(0, Z_i^2 - nk_1 + C_{i-1}^+) \quad ; i = 1,2,...,n \end{aligned} \quad (4)$$

กำหนดให้ $C_0^+ = C_0^- = 0$ และ

$$Z_i^2 = \sum_{m=1}^{n} Z^2{}_{im} \bullet Z_{im} = \frac{X_{im} - \mu_0}{\sigma_0}$$

เป็นค่ามาตรฐานที่ถูกแปลงจากค่าสังเกตที่ i

โดยมีค่าอ้างอิง k_1 และ k_2 ของตัวสถิติ C_i^+ และ C_i^- ดังนี้

$$k_1 = \frac{\ln \lambda_1}{\left(1 - (1/\lambda_1)\right)} \text{ และ } k_2 = \frac{\ln \lambda_2}{\left(1 - (1/\lambda_2)\right)}$$

โดยที่ $\lambda_1 = \sigma_1/\sigma_0$ คือขนาดการเปลี่ยนแปลงของส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานที่เพิ่มขึ้นของกระบวนการ และ $\lambda_2 = \sigma_2/\sigma_0$ คือขนาดการเปลี่ยนแปลงของส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานที่ลดลงของกระบวนการ โดยขีดจำกัดของแผนภูมิควบคุม CP CUSUM คือ

ขีดจำกัดควบคุมบน : $UCL_{CP\ CUSUM} = h_2$

ขีดจำกัดควบคุมล่าง : $LCL_{CP\ CUSUM} = 0$

2.2 ความยาวรันเฉลี่ย (Average Run Length; *ARL*)

ค่าความยาวรันเฉลี่ย (ARL) คือจำนวนหน่วยตัวอย่างโดยเฉลี่ยที่ใช้ในการตรวจสอบคุณภาพผลิตภัณฑ์จนกระทั่งพบการออกนอกขีดจำกัดควบคุมเป็นครั้งแรก แบ่งออกเป็น 2 กรณี คือ

กรณีที่ 1 เมื่อกระบวนการอยู่ภายใต้การควบคุม จะพิจารณาค่า ARL_0 ซึ่งควรมีค่าสูง สำหรับแผนภูมิควบคุมมาตรฐาน (Shewhart Chart) สามารถคำนวณได้ดังสมการที่ (5)

$$ARL_0 = \frac{1}{\alpha} \tag{5}$$

เมื่อ α คือความน่าจะเป็นความผิดพลาดประเภทที่ 1 หมายถึง ความน่าจะเป็นที่กระบวนการอยู่ไม่ภายใต้การควบคุม เมื่อกระบวนการไม่เกิดการเปลี่ยนแปลง

กรณีที่ 2 เมื่อกระบวนการไม่อยู่ภายใต้การควบคุม จะพิจารณาค่า ARL_1 ซึ่งควรมีค่าต่ำสุดสำหรับแผนภูมิควบคุมมาตรฐาน สามารถคำนวณได้ ดังสมการที่ (6)

$$ARL_1 = \frac{1}{1-\beta} \tag{6}$$

เมื่อ β คือความน่าจะเป็นความผิดพลาดประเภทที่ 2 หมายถึง ความน่าจะเป็นที่กระบวนการอยู่ภายใต้การควบคุม เมื่อกระบวนการเกิดการเปลี่ยนแปลง

โดยงานวิจัยนี้ประมาณค่า ARL จากวิธีการจำลองแบบมอนติคาร์โล (Monte Carlo Simulation) สามารถคำนวณได้ดังสมการที่ (7)

$$ARL = \frac{\sum_{t=1}^{N} RL_t}{N} \qquad ; RL_t = 1,2,... \tag{7}$$

เมื่อ N คือจำนวนรอบของการทำซ้ำในแต่ละสถานการณ์ กำหนดให้มีค่า N =10,000 รอบ

RL_t คือความยาวรันในแต่ละการทำซ้ำของการจำลอง

2.3 การตอบสนองเริ่มต้นอย่างรวดเร็ว (Fast Initial Response; FIR)

การใช้ค่า FIR ในแผนภูมิควบคุม CUSUM เป็นการกำหนดค่าเริ่มต้นเพื่อให้แผนภูมิควบคุมสามารถตอบสนองต่อการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงค่าความผันแปรของกระบวนการได้รวดเร็ว โดยช่วยให้แผนภูมิ CUSUM ส่งสัญญาณการออกนอกการขีดจำกัดควบคุมได้เร็วกว่าที่ควรจะเป็น ซึ่งโดยปกติจะกำหนดค่าเริ่มต้นของแผนภูมิควบคุม CUSUM มีค่าเท่ากับ 0 $(C_i^+ = C_i^- = 0)$ ทำให้ลดระยะเวลาในการส่งสัญญาณหรือลดจำนวนตัวอย่างในการนำมาตรวจสอบ

การใช้ค่า FIR ของแผนภูมิควบคุม CUSUM ทำให้ค่า ARL_1 ลดลงประมาณ 30–40% เมื่อเปรียบเทียบที่กำหนดค่า $C_i^+ = C_i^- = 0$ ในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงของกระบวนการ โดยใช้ค่าเริ่มต้น เท่ากับ 25%HS, 50%HS และ75%HS หรือสามารถเขียนในรูป $C_i^+ = C_i^- = \frac{h}{4}, \frac{h}{2}$ และ $\frac{3h}{4}$ ตามลำดับ (ดู Lucas และ Crosier [10])

3. ผลการวิจัย

ในงานวิจัยนี้ศึกษาและเปรียบเทียบประสิทธิภาพของแผนภูมิควบคุม χ CUSUM และ CP CUSUM เพื่อตรวจจับการเปลี่ยนแปลงค่าความผันแปรของกระบวนการ โดยพิจารณาจากค่า ARL_1 เป็นเกณฑ์ในการวัดประสิทธิภาพ ซึ่งประมาณค่า ARL จากวิธีการจำลองแบบมอนติคาร์โล กำหนดจำนวนรอบของการทำซ้ำ (N) เท่ากับ 10,000 รอบ กำหนดค่า ARL_0 เท่ากับ 200, 370 และ 500 และกำหนดค่าเริ่มต้นของแผนภูมิควบคุม χ CUSUM และ CP CUSUM เท่ากับ 25%HS, 50%HS และ 75%HS ของขีดจำกัดควบคุม สำหรับการแจกแจงที่ใช้ในการศึกษางานวิจัย คือการแจกแจงลาปลาซ Laplace(0,2) และการแจกแจงลอจิสติก Logistic(2,2) และการแจกแจงแกมมา Gamma(9,1) โดยแสดงข้อมูลตารางที่ 1 ถึงตารางที่ 9 ดังต่อไปนี้

ตารางที่ 1 ค่า ARL_1 ของแผนภูมิควบคุม χ CUSUM และ CP CUSUM เมื่อกำหนดค่า ARL_0 = 200 และข้อมูลมีการแจกแจง Laplace(0, 2)

δ	CUSUM	ค่า C_0^+ และ C_0^-			
		0%HS	25%HS	50%HS	75%HS
1.05	χ	189.17	141.61	95.55	46.28*
	CP	143.91	139.33	126.55	98.35
1.10	χ	180.41	136.47	90.42	44.76*
	CP	105.46	101.27	91.69	72.55
1.15	χ	170.99	129.15	84.73	41.74*
	CP	83.01	79.77	70.28	54.45
1.20	χ	163.87	122.98	80.97	40.51*
	CP	64.62	62.55	55.62	44.38
1.25	χ	157.71	116.75	79.42	38.20
	CP	54.49	51.50	45.78	35.84*
1.50	χ	130.04	98.02	64.55	31.28
	CP	25.28	23.21	20.44	16.96*
1.75	χ	113.35	84.91	55.98	26.80
	CP	14.31	13.45	11.51	9.41*
2	χ	100.12	75.35	49.18	23.79
	CP	9.40	9.07	7.77	6.65*
2.5	χ	82.61	61.18	40.31	19.08
	CP	5.13	4.71	4.27	3.71*
3	χ	70.16	51.84	34.37	16.25
	CP	3.29	3.21	2.87	2.54*

หมายเหตุ: * คือ ค่า ARL_1 ต่ำสุด

จากตารางที่ 1–3 แสดงผลการเปรียบเทียบประสิทธิภาพในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงค่าความผันแปรของแผนภูมิควบคุม χ CUSUM และ CP CUSUM เมื่อข้อมูลมีการแจกแจง Laplace(0, 2) กำหนดค่า ARL_0 = 200, 370 และ 500 ตามลำดับ และศึกษาค่า FIR กำหนดให้ค่า $C_0^+ = C_0^-$= 0%HS, 25%HS, 50%HS และ75%HS ตามลำดับ เมื่อพิจารณาค่า ARL_1 ที่ต่ำสุด จากตารางที่ 1 พบว่า แผนภูมิควบคุม χ CUSUM เมื่อกำหนดค่า FIR เท่ากับ 75%HS มีประสิทธิภาพในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงของความผันแปรดีสุด ที่ระดับการเปลี่ยนแปลงขนาดเล็ก $\delta < 1.25$ และแผนภูมิควบคุม CP CUSUM เมื่อกำหนดค่า FIR เท่ากับ 75%HS มีประสิทธิภาพดีกว่าแผนภูมิควบคุม χ CUSUM ที่ระดับการเปลี่ยนแปลงขนาดใหญ่ $\delta \geq 1.25$

ตารางที่ 2 ค่า ARL_1 ของแผนภูมิควบคุม χ CUSUM และ CP CUSUM เมื่อกำหนดค่า ARL_0 = 370 และข้อมูลมีการแจกแจง Laplace(0, 2)

δ	CUSUM	ค่า C_0^+ และ C_0^-			
		0%HS	25%HS	50%HS	75%HS
1.05	χ	351.51	265.04	175.18	86.35*
	CP	249.37	243.85	241.42	184.67
1.10	χ	333.13	250.20	167.26	82.24*
	CP	182.30	174.76	170.29	126.05
1.15	χ	318.4	237.73	158.37	78.81*
	CP	135.74	130.28	126.38	100.54
1.20	χ	302.43	228.81	150.84	75.00*
	CP	105.83	100.76	94.48	75.09
1.25	χ	290.83	218.41	144.69	71.32
	CP	85.24	81.08	74.68	57.18*
1.50	χ	242.59	180.51	119.65	59.79
	CP	36.46	34.44	32.07	24.14*
1.75	χ	209.56	156.90	104.32	50.63
	CP	20.19	18.78	17.54	14.04*
2	χ	184.61	138.37	90.89	44.72
	CP	12.80	11.79	11.28	8.66*
2.5	χ	151.52	113.37	74.63	36.87
	CP	6.63	6.01	5.87	4.71*
3	χ	129.34	97.38	64.33	31.37
	CP	4.10	3.77	3.78	3.31*

หมายเหตุ: * คือ ค่า ARL_1 ต่ำสุด

จากตารางที่ 2 แสดงผลการเปรียบเทียบประสิทธิภาพในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงค่าความผันแปรของแผนภูมิควบคุม χ CUSUM และ CP CUSUM กำหนดค่า ARL_0 = 370 และค่า $C_0^+ = C_0^-$ = 0%HS, 25%HS, 50%HS และ 75%HS ตามลำดับ เมื่อพิจารณาค่า ARL_1 ที่ต่ำสุด พบว่า แผนภูมิควบคุม χ CUSUM เมื่อกำหนดค่า FIR เท่ากับ 75%HS มีประสิทธิภาพในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงของความผันแปรดีสุด ที่ระดับการเปลี่ยนแปลงขนาดเล็ก $\delta < 1.25$ และแผนภูมิควบคุม CP CUSUM เมื่อกำหนดค่า FIR เท่ากับ 75%HS มีประสิทธิภาพดีกว่าแผนภูมิควบคุม χ CUSUM ที่ระดับการเปลี่ยนแปลง

ขนาดใหญ่ $\delta \geq 1.25$ ซึ่งให้ผลสอดคล้องกันกับกรณีที่ ARL_0 = 200

ตารางที่ 3 ค่า ARL_1 ของแผนภูมิควบคุม χ CUSUM และ CP CUSUM เมื่อกำหนดค่า ARL_0 = 500 และข้อมูลมีการแจกแจง Laplace(0, 2)

δ	CUSUM	ค่า C_0^+ และ C_0^-			
		0%HS	25%HS	50%HS	75%HS
1.05	χ	475.23	354.82	236.07	118.06*
	CP	319.49	314.87	299.16	229.65
1.10	χ	451.23	338.51	225.45	111.01*
	CP	232.07	228.45	211.59	152.84
1.15	χ	429.64	323.62	215.27	107.15*
	CP	173.65	160.35	151.28	119.07
1.20	χ	411.10	309.68	205.26	101.75
	CP	135.16	125.94	112.11	84.35*
1.25	χ	393.96	294.99	197.28	98.04
	CP	108.32	102.04	84.90	68.10*
1.50	χ	331.13	247.28	162.36	80.82
	CP	43.25	40.48	35.92	27.28*
1.75	χ	283.39	211.76	140.76	70.37
	CP	24.05	21.72	19.43	14.84*
2	χ	252.66	187.09	125.12	61.66
	CP	15.02	13.80	11.85	9.59*
2.5	χ	204.89	153.69	101.98	50.61
	CP	7.68	6.88	6.18	5.13*
3	χ	176.25	131.33	86.04	42.87
	CP	4.52	4.34	3.90	3.55*

หมายเหตุ: * คือ ค่า ARL_1 ต่ำสุด

จากตารางที่ 3 แสดงผลการเปรียบเทียบประสิทธิภาพในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงค่าความผันแปรของแผนภูมิควบคุม χ CUSUM และ CP CUSUM กำหนดค่า ARL_0 = 500 และ $C_0^+ = C_0^-$ = 0%HS, 25%HS, 50%HS และ75%HS เมื่อพิจารณาค่า ARL_1 ที่ต่ำสุด พบว่า แผนภูมิควบคุม χ CUSUM เมื่อกำหนดค่า FIR เท่ากับ 75%HS มีประสิทธิภาพในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงของความผันแปรดีสุด ที่ระดับการเปลี่ยนแปลงขนาดเล็ก $\delta < 1.2$ และแผนภูมิควบคุม CP CUSUM เมื่อกำหนดค่า FIR เท่ากับ 75%HS มีประสิทธิภาพดีกว่าแผนภูมิควบคุม χ CUSUM ที่ระดับการเปลี่ยนแปลงขนาดใหญ่ $\delta \geq 1.2$ ซึ่งให้ผลการศึกษาสอดคล้องกันกับตารางที่ 1 และ 2

ตารางที่ 4 ค่า ARL_1 ของแผนภูมิควบคุม χ CUSUM และ CP CUSUM เมื่อกำหนดค่า ARL_0 = 200 และข้อมูลมีการแจกแจง Logistic(2, 2)

δ	CUSUM	ค่า C_0^+ และ C_0^-			
		0%HS	25%HS	50%HS	75%HS
1.05	χ	190.32	141.69	94.16	46.17*
	CP	150.29	137.22	112.57	72.92
1.10	χ	181.77	135.33	89.51	44.70*
	CP	124.59	113.77	90.58	55.02
1.15	χ	171.23	127.20	85.69	41.54*
	CP	104.29	95.66	71.51	47.25
1.20	χ	164.29	123.30	80.99	37.92
	CP	85.21	78.88	62.61	35.70*
1.25	χ	158.28	118.47	78.20	31.23
	CP	75.97	68.44	52.87	19.69*
1.50	χ	131.86	97.38	65.26	27.29
	CP	38.06	34.42	27.12	12.80*
1.75	χ	113.17	84.00	55.62	23.48
	CP	21.63	21.17	16.41	8.52*
2	χ	99.75	75.08	49.23	19.11
	CP	14.72	13.39	11.17	4.78*
2.5	χ	82.57	61.24	40.70	16.59
	CP	7.79	6.77	6.43	3.41*
3	χ	69.43	51.90	34.63	14.50
	CP	4.61	4.39	3.93	2.47*

หมายเหตุ: * คือ ค่า ARL_1 ต่ำสุด

จากตารางที่ 4–6 แสดงผลการเปรียบเทียบประสิทธิภาพในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงค่าความผันแปรของแผนภูมิควบคุม χ CUSUM และ CP CUSUM เมื่อข้อมูลมีการแจกแจง Logistic(2, 2) กำหนดค่า ARL_0 = 200, 370 และ 500 ตามลำดับ และศึกษาค่า FIR โดยกำหนดให้ค่า $C_0^+ = C_0^-$ = 0%HS, 25%HS, 50%HS และ 75%HS ตามลำดับ เมื่อพิจารณาค่า ARL_1 ที่ต่ำสุด จากตารางที่ 4 พบว่า แผนภูมิควบคุม χ CUSUM เมื่อกำหนดค่า FIR เท่ากับ 75%HS มีประสิทธิภาพในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงของความผันแปรดีสุด ที่ระดับ

การเปลี่ยนแปลงขนาดเล็ก $\delta < 1.2$ และแผนภูมิควบคุม CP CUSUM เมื่อกำหนดค่า FIR เท่ากับ 75%HS มีประสิทธิภาพดีกว่าแผนภูมิควบคุม χ CUSUM ที่ระดับการเปลี่ยนแปลงขนาดใหญ่ $\delta \geq 1.2$

ตารางที่ 5 ค่า ARL_1 ของแผนภูมิควบคุม χ CUSUM และ CP CUSUM เมื่อกำหนดค่า ARL_0 = 370 และข้อมูลมีการแจกแจง Logistic(2, 2)

δ	CUSUM	ค่า C_0^+ และ C_0^-			
		0%HS	25%HS	50%HS	75%HS
1.05	χ	349.63	261.57	173.72	86.29*
	CP	290.07	262.52	199.63	122.74
1.10	χ	331.63	249.96	165.31	82.05*
	CP	231.46	199.54	158.68	96.09
1.15	χ	316.41	237.92	157.97	78.45*
	CP	191.65	176.42	132.16	81.36
1.20	χ	303.68	227.13	149.66	74.69
	CP	159.76	147.23	101.33	71.51*
1.25	χ	289.64	217.13	143.96	71.29
	CP	132.15	119.73	89.01	56.48*
1.50	χ	240.80	180.33	119.55	59.68
	CP	65.36	59.72	50.08	32.26*
1.75	χ	209.08	156.18	104.10	51.15
	CP	38.26	34.30	28.01	17.93*
2	χ	183.61	138.38	90.79	44.40
	CP	24.34	22.12	18.90	13.19*
2.5	χ	150.56	112.93	75.54	37.14
	CP	12.75	11.83	9.82	7.44*
3	χ	129.28	96.43	63.93	31.48
	CP	7.63	6.60	5.95	4.80*

หมายเหตุ: * คือ ค่า ARL_1 ต่ำสุด

จากตารางที่ 5 แสดงผลการเปรียบเทียบประสิทธิภาพในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงค่าความผันแปรของแผนภูมิควบคุม χ CUSUM และ CP CUSUM กำหนดค่า ARL_0 = 370 และค่า $C_0^+ = C_0^-$ = 0%HS, 25%HS, 50%HS และ 75%HS ตามลำดับ เมื่อพิจารณาค่า ARL_1 ที่ต่ำสุด พบว่า แผนภูมิควบคุม χ CUSUM เมื่อกำหนดค่า FIR เท่ากับ 75%HS มีประสิทธิภาพในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงของความผันแปรดีสุด ที่ระดับการเปลี่ยนแปลงขนาดเล็ก $\delta < 1.2$ และแผนภูมิควบคุม CP CUSUM เมื่อกำหนดค่า FIR เท่ากับ 75%HS มีประสิทธิภาพดีกว่าแผนภูมิควบคุม χ CUSUM ที่ระดับการเปลี่ยนแปลงขนาดใหญ่ $\delta \geq 1.2$ ซึ่งให้ผลสอดคล้องกันกับกรณีที่ค่า ARL_0 = 200

ตารางที่ 6 ค่า ARL_1 ของแผนภูมิควบคุม χ CUSUM และ CP CUSUM เมื่อกำหนดค่า ARL_0 = 500 และข้อมูลมีการแจกแจง Logistic(2, 2)

δ	CUSUM	ค่า C_0^+ และ C_0^-			
		0%HS	25%HS	50%HS	75%HS
1.05	χ	474.41	353.26	234.93	116.61*
	CP	404.17	357.77	272.57	154.98
1.10	χ	450.36	337.17	224.49	110.58*
	CP	315.27	273.29	211.54	129.51
1.15	χ	426.69	320.89	213.92	105.28*
	CP	276.12	225.10	174.73	108.14
1.20	χ	407.52	305.12	204.79	101.59
	CP	231.90	196.90	152.26	88.71*
1.25	χ	393.40	294.97	194.83	97.57
	CP	184.93	170.61	125.11	72.98*
1.50	χ	325.69	210.69	161.70	80.30
	CP	94.39	84.78	66.66	40.93*
1.75	χ	281.85	185.38	139.86	69.61
	CP	33.33	49.36	38.15	27.98*
2	χ	248.83	152.36	124.13	61.53
	CP	33.33	29.66	25.28	19.16*
2.5	χ	205.04	130.54	102.14	49.62
	CP	17.30	14.38	13.35	9.29*
3	χ	175.13	114.40	86.99	42.76
	CP	10.08	8.76	8.25	6.06*

หมายเหตุ: * คือ ค่า ARL_1 ต่ำสุด

จากตารางที่ 6 แสดงผลการเปรียบเทียบประสิทธิภาพในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงค่าความผันแปรของแผนภูมิควบคุม χ CUSUM และ CP CUSUM กำหนดค่า ARL_0 = 500 และค่า $C_0^+ = C_0^-$ = 0%HS, 25%HS, 50%HS และ75%HS ตามลำดับ เมื่อพิจารณาค่า ARL_1 ที่ต่ำสุด พบว่า แผนภูมิควบคุม χ CUSUM เมื่อกำหนดค่า FIR เท่ากับ 75%HS มีประสิทธิภาพ

ในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงของความผันแปรดีสุด ที่ระดับการเปลี่ยนแปลงขนาดเล็ก $\delta < 1.2$ และแผนภูมิควบคุม CP CUSUM เมื่อกำหนดค่า FIR เท่ากับ 75%HS มีประสิทธิภาพดีกว่าแผนภูมิควบคุม χ CUSUM ที่ระดับการเปลี่ยนแปลงขนาดใหญ่ $\delta \geq 1.2$

ตารางที่ 7 ค่า ARL_1 ของแผนภูมิควบคุม χ CUSUM และ CP CUSUM เมื่อกำหนดค่า ARL_0 = 200 และข้อมูลมีการแจกแจง Gamma(9, 1)

δ	CUSUM	ค่า C_0^+ และ C_0^-			
		0%HS	25%HS	50%HS	75%HS
1.05	χ	189.47	142.96	93.66	46.70*
	CP	150.80	156.09	153.83	150.86
1.10	χ	180.63	135.29	90.14	44.34*
	CP	114.98	120.16	120.48	119.49
1.15	χ	172.11	129.38	85.52	42.47*
	CP	92.20	95.47	89.37	90.69
1.20	χ	166.28	123.83	82.80	40.28*
	CP	71.18	73.08	74.48	74.05
1.25	χ	159.62	119.30	78.92	39.02*
	CP	58.34	56.16	57.31	55.83
1.50	χ	136.78	102.21	67.15	33.25
	CP	20.07	20.01	19.59	19.37*
1.75	χ	120.69	89.96	59.84	29.28
	CP	7.52	7.56	7.02	6.70*
2	χ	110.08	82.67	54.77	26.47
	CP	2.86	2.62	2.37	2.17*
2.5	χ	94.16	70.81	46.57	22.59
	CP	0.42	0.36	0.27	0.18*
3	χ	84.43	63.01	41.69	20.10
	CP	0.04	0.03	0.02	0.01*

หมายเหตุ: * คือ ค่า ARL_1 ต่ำสุด

จากตารางที่ 7–9 แสดงผลการเปรียบเทียบประสิทธิภาพในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงค่าความผันแปรของแผนภูมิควบคุม χ CUSUM และ CP CUSUM เมื่อข้อมูลมีการแจกแจง Gamma (9, 1) กำหนดค่า ARL_0 = 200, 370 และ 500 ตามลำดับ และศึกษาค่า FIR โดยกำหนดให้ค่า $C_0^+ = C_0^-$= 0%HS, 25%HS, 50%HS และ 75%HS ตามลำดับ เมื่อพิจารณาค่า ARL_1 ที่ต่ำสุด จากตารางที่ 7 พบว่า แผนภูมิควบคุม χ CUSUM เมื่อกำหนดค่า FIR เท่ากับ 75%HS มีประสิทธิภาพในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงของความผันแปรดีสุด ที่ระดับการเปลี่ยนแปลงขนาดเล็ก $\delta < 1.5$ และแผนภูมิควบคุม CP CUSUM เมื่อกำหนดค่า FIR เท่ากับ 75%HS มีประสิทธิภาพดีกว่าแผนภูมิควบคุม χ CUSUM ที่ระดับการเปลี่ยนแปลงขนาดใหญ่ $\delta \geq 1.5$

ตารางที่ 8 ค่า ARL_1 ของแผนภูมิควบคุม χ CUSUM และ CP CUSUM เมื่อกำหนดค่า ARL_0 = 370 และข้อมูลมีการแจกแจง Gamma(9, 1)

δ	CUSUM	ค่า C_0^+ และ C_0^-			
		0%HS	25%HS	50%HS	75%HS
1.05	χ	352.86	264.25	175.55	87.09*
	CP	292.48	288.22	292.51	282.24
1.10	χ	335.58	251.14	168.19	82.96*
	CP	226.48	214.06	213.42	223.62
1.15	χ	322.51	241.45	161.31	79.81*
	CP	171.60	168.58	171.90	174.01
1.20	χ	307.28	231.44	152.82	76.75*
	CP	139.69	136.62	135.84	134.03
1.25	χ	297.98	223.07	149.07	74.17*
	CP	109.06	104.68	107.39	105.92
1.50	χ	254.01	191.89	126.08	62.60
	CP	36.14	35.24	35.21	35.19*
1.75	χ	225.78	168.95	112.54	55.76
	CP	12.67	12.49	11.76	10.89*
2	χ	204.95	153.53	101.72	50.15
	CP	4.74	4.37	4.05	3.33*
2.5	χ	176.12	131.88	87.41	42.87
	CP	0.76	0.63	0.43	0.28*
3	χ	158.33	117.93	77.80	38.54
	CP	0.09	0.072	0.03	0.01*

หมายเหตุ: * คือ ค่า ARL_1 ต่ำสุด

จากตารางที่ 8 แสดงผลการเปรียบเทียบประสิทธิภาพในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงค่าความผันแปรของแผนภูมิ

ควบคุม χ CUSUM และ CP CUSUM กำหนดค่า ARL_0 = 370 และค่า $C_0^+ = C_0^-$ = 0%HS, 25%HS, 50%HS และ 75%HS ตามลำดับ เมื่อพิจารณาค่า ARL_1 ที่ต่ำสุด พบว่า แผนภูมิควบคุม χ CUSUM เมื่อกำหนดค่า FIR เท่ากับ 75%HS มีประสิทธิภาพในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงของความผันแปรดีสุด ที่ระดับการเปลี่ยนแปลงขนาดเล็ก $\delta < 1.5$ และแผนภูมิควบคุม CP CUSUM เมื่อกำหนดค่า FIR เท่ากับ 75%HS มีประสิทธิภาพดีกว่าแผนภูมิควบคุม χ CUSUM ที่ระดับการเปลี่ยนแปลงขนาดใหญ่ $\delta \geq 1.5$ ซึ่งให้ผลสอดคล้องกันกับกรณีที่ค่า ARL_0 = 200

ตารางที่ 9 ค่า ARL_1 ของแผนภูมิควบคุม χ CUSUM และ CP CUSUM เมื่อกำหนดค่า ARL_0 = 500 และข้อมูลมีการแจกแจง Gamma(9, 1)

δ	CUSUM	ค่า C_0^+ และ C_0^-			
		0%HS	25%HS	50%HS	75%HS
1.05	χ	476.94	357.07	237.99	118.65*
	CP	386.96	393.17	392.38	386.62
1.10	χ	455.19	340.36	226.32	112.81*
	CP	301.90	298.21	299.44	295.97
1.15	χ	434.87	325.80	216.66	108.37*
	CP	238.98	232.44	236.18	238.02
1.20	χ	416.41	312.98	208.79	103.25*
	CP	182.80	183.68	180.20	237.87
1.25	χ	401.77	301.55	200.69	99.74*
	CP	149.81	144.52	148.81	188.16
1.50	χ	343.25	257.62	171.91	84.68*
	CP	48.15	46.65	47.15	141.78
1.75	χ	304.57	228.83	152.47	75.26
	CP	16.96	16.08	14.74	13.29*
2	χ	277.35	207.19	137.58	68.12
	CP	6.13	5.52	4.85	3.64*
2.5	χ	238.42	178.69	118.86	58.45
	CP	1.05	0.78	0.59	0.31*
3	χ	212.95	159.27	105.61	52.55
	CP	0.14	0.10	0.05	0.02*

หมายเหตุ: * คือ ค่า ARL_1 ต่ำสุด

จากตารางที่ 9 แสดงผลการเปรียบเทียบประสิทธิภาพในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงค่าความผันแปรของแผนภูมิควบคุม χ CUSUM และ CP CUSUM กำหนดค่า ARL_0 = 500 และค่า $C_0^+ = C_0^-$ = 0%HS, 25%HS, 50%HS และ 75%HS ตามลำดับ เมื่อพิจารณาค่า ARL_1 ที่ต่ำสุด พบว่า แผนภูมิควบคุม χ CUSUM เมื่อกำหนดค่า FIR เท่ากับ 75%HS มีประสิทธิภาพในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงของความผันแปรดีสุด ที่ระดับการเปลี่ยนแปลงขนาดเล็ก $\delta < 1.75$ และแผนภูมิควบคุม CP CUSUM เมื่อกำหนดค่า FIR เท่ากับ 75%HS มีประสิทธิภาพดีกว่าแผนภูมิควบคุม χ CUSUM ที่ระดับการเปลี่ยนแปลงขนาดใหญ่ $\delta \geq 1.75$

4. อภิปรายผลและสรุป

จากการศึกษาและเปรียบเทียบประสิทธิภาพในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงความผันแปรของกระบวนการของแผนภูมิควบคุม χ CUSUM และแผนภูมิควบคุม CP CUSUM เมื่อกำหนดค่าเริ่มต้น C_0^+ และ C_0^- ของตัวสถิติ CUSUM เพื่อการตอบสนองการเปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็ว (FIR) เท่ากับ 0%HS, 25%HS, 50%HS และ 75%HS ตามลำดับ เมื่อกระบวนการมีการแจกแจง Laplace(0,2) การแจกแจง Logistic(2, 2) และการแจกแจง Gamma(9,1) วัดประสิทธิภาพจับการเปลี่ยนแปลงจากแผนภูมิควบคุมที่ให้ค่า ARL_1 ต่ำสุด พบว่า แผนภูมิควบคุม χ CUSUM และแผนภูมิควบคุม CP CUSUM มีความแกร่งต่อค่าสังเกตที่มีลักษณะไม่เป็นปรกติทั้งในลักษณะสมมาตรและไม่สมมาตร โดยค่า FIR เท่ากับ 75%HS มีประสิทธิภาพในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงของความผันแปรดีสุด สำหรับทุกกรณีศึกษาของค่า ARL_0 = 200, 370 และ 500 ตามลำดับ และแผนภูมิควบคุม χ CUSUM มีประสิทธิภาพในการตรวจจับความผันแปรของกระบวนการเมื่อขนาดการเปลี่ยนแปลงมีขนาดเล็ก และแผนภูมิควบคุม CP CUSUM มีประสิทธิภาพในการตรวจจับความผันแปรของกระบวนการเมื่อขนาดการเปลี่ยนแปลงมีขนาดใหญ่ โดยในตารางที่ 10 แสดงแผนภูมิควบคุมที่เหมาะสมเมื่อระดับการเปลี่ยนแปลงมีขนาดต่างๆ ของทุกกรณีศึกษา

ตารางที่ 10 แผนภูมิควบคุมที่เหมาะสมต่อระดับการเปลี่ยนแปลงในความผันแปรของกระบวนการเมื่อกำหนดค่าเริ่มต้น FIR = 75%HS

Laplace(0,2)		Logistic(2, 2)		Gamma(9,1)	
ARL_0=200					
$\delta < 1.25$	$\delta \geq 1.25$	$\delta < 1.20$	$\delta \geq 1.20$	$\delta < 1.50$	$\delta \geq 1.50$
χ CUSUM	CP CUSUM	χ CUSUM	CP CUSUM	χ CUSUM	CP CUSUM
ARL_0=370					
$\delta < 1.25$	$\delta \geq 1.25$	$\delta < 1.20$	$\delta \geq 1.20$	$\delta < 1.50$	$\delta \geq 1.50$
χ CUSUM	CP CUSUM	χ CUSUM	CP CUSUM	χ CUSUM	CP CUSUM
ARL_0=500					
$\delta < 1.20$	$\delta \geq 1.20$	$\delta < 1.20$	$\delta \geq 1.20$	$\delta < 1.75$	$\delta \geq 1.75$
χ CUSUM	CP CUSUM	χ CUSUM	CP CUSUM	χ CUSUM	CP CUSUM

แผนภูมิควบคุม χ CUSUM และ CP CUSUM มีความแกร่งต่อค่าสังเกตของกระบวนการที่มีลักษณะสมมาตร ซึ่งพิจารณาได้จากผลการศึกษาการแจกแจงลาปลาซ และการแจกแจงลอจิสติก รวมถึงค่าสังเกตของกระบวนการที่มีลักษณะไม่สมมาตร อย่างการแจกแจงแกมมา สำหรับทุกระดับค่า ARL_0 โดยการกำหนดค่าเริ่มต้นเพื่อการตอบสนองอย่างรวดเร็วในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงของทั้งแผนภูมิควบคุม χ CUSUM และ CP CUSUM เมื่อกำหนดค่า FIR = 75%HS มีความไวต่อการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงค่าความผันแปรของกระบวนการ โดยเป็นการเพิ่มประสิทธิภาพในการตรวจของแผนภูมิควบคุม ซึ่งสามารถตรวจจับได้เร็วกว่าควรจะเป็นเมื่อเปรียบเทียบผลลัพธ์จากการกำหนดค่าเริ่มต้นให้มีค่าเท่ากับศูนย์

5. กิตติกรรมประกาศ

งานวิจัยนี้ได้รับทุนสนับสนุนจากคณะวิทยาศาสตร์ประยุกต์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ ตามสัญญาเลขที่ 6245109 และขอขอบคุณภาควิชาสถิติประยุกต์ที่สนับสนุนในการให้ใช้งานคอมพิวเตอร์ความเร็วสูงของภาควิชา

เอกสารอ้างอิง

[1] D. C. Montgomery, *Introduction to Statistical Quality Control*, 4th ed. John Wiley & Sons, 2009.

[2] W. A. Shewhart, *Economic Control of Quality of manufactured Product*. D. Van Nostrand Company, Inc., 1931.

[3] E. S. Page, “Continuous inspection schemes,” *Biometrika*, vol. 41, no. 1–2, pp. 100–115, 1954.

[4] S. W. Roberts, “Control chart tests based on geometric moving average,” *Techmometrics*, vol. 42, no. 1, pp. 239–250, 1959.

[5] C. A. Acosta-Mejia, J. J. Pignatiello, and B. R. Venkateshwara, “A comparison of control charting procedures for monitoring process dispersion,” *IIE Transactions*, vol. 31, no. 6, pp. 569–579, 1999.

[6] K. Tuprah and M. Ncube, “A comparison of dispersion quality control charts,” *Sequential Analysis*, vol. 6, no. 2, pp. 155–163, 1987.

[7] C. H. Ng, “Development and evaluation of control charts using exponentially weighted moving averages,” M.S. thesis, Faculty of the Graduate College, Oklahoma State University, 1988.

[8] S. V. Crowder and M. D. Hamilton, “An EWMA for monitoring a process standard deviation,” *Journal of Quality Technology*, vol. 24, no. 1, pp. 12–21, 1992.

[9] T. C. Chang and F. F. Gan, “A cumulative sum control chart for monitoring process variance,” *Journal of Quality Technology*, vol. 27, no. 2, pp. 109–119, 1995.

[10] J. M. Lucas and R. B. Crosier, "Fast initial response for CUSUM quality-control schemes: Give your CUSUM a head start," *Technometrics*, vol. 24, no. 3, pp. 199–205, 1982.

[11] S. H. Steiner, "EWMA control charts with Time-Varying control limits and fast initial response," *Journal of Quality Technology*, vol. 31, no. 1, pp. 75–86, 1999.

[12] D. M. Hawkins and D. H. Olwell, "Cumulative sum charts and charting for quality improvement," *Springer Science & Business Media*, 1998.

[13] A. Haq, "A new hybrid exponentially weighted moving average control chart for monitoring process mean," *Quality and Reliability Engineering International*, vol. 29, no. 7, pp. 1015–1025, 2013.

[14] R. A. Sanusi, M. Riaz, N. Abbas, and M. R. Abujiya "Using FIR to improve CUSUM charts for monitoring process dispersion," *Quality and Reliability Engineering International*, vol. 33, no. 5, pp. 1045–1056, 2017.

[15] R. Thitisoowaranon, S. Sukparungsee, and Y. Areepong, "A mixed cumulative sum – Tukey's control chart for detecting process dispersion," *The Journal of KMUTNB*, vol. 29, no. 3, pp. 507–517, 2019 (in Thai).

[16] E. B. Wilson and M. M. Hilferty, "The distribution of chi-square," in *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 1931, pp. 684–688.